SISUKORD

1. REAALARVUDE PIIRKONNAD

Kuna erinevates õpikutes kasutatakse reaalarvude piirkondade märkimiseks erinevaid tähistusi, siis oleks kasulik teada mõlemat varianti.

Nimetus	Tingimus	Esimene tähistusviis	Teine tähistusviis
Lõik a-st b-ni	$a \le x \le b$	[a; b]	[a; b]
Vahemik a-st b-ni	$a < x < b$	]a; b[	(a; b)
Poollõik a-st b-ni	$a \le x < b$ $a < x \le b$	[a; b[ ]a; b]	[a; b) (a; b]
Lõpmatu poollõik	$x \ge a$ $x \le a$	[a; ∞[ ]–∞; a]	[a; ∞) (–∞; a]
Lõpmatu vahemik	$x > a$ $x < a$	]a; ∞[ ]–∞; a[	[a; ∞) (–∞; a]

2. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND

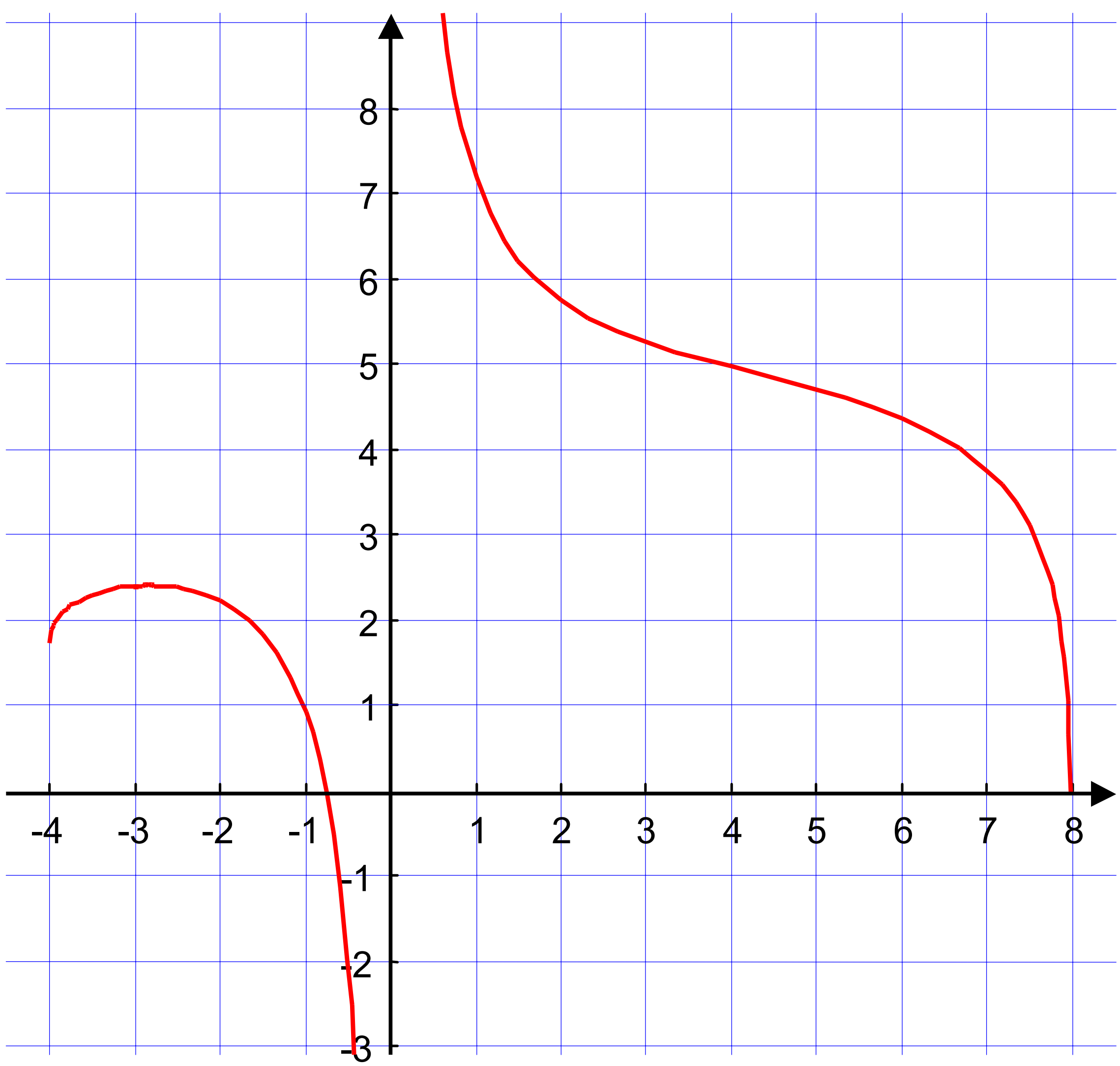
Leiame funktsiooni $y = \frac{3}{x} + \sqrt{4 + x} + \ln(8 - x)$ määramispiirkonna.

Leiame iga liidetava määramispiirkonna eraldi:

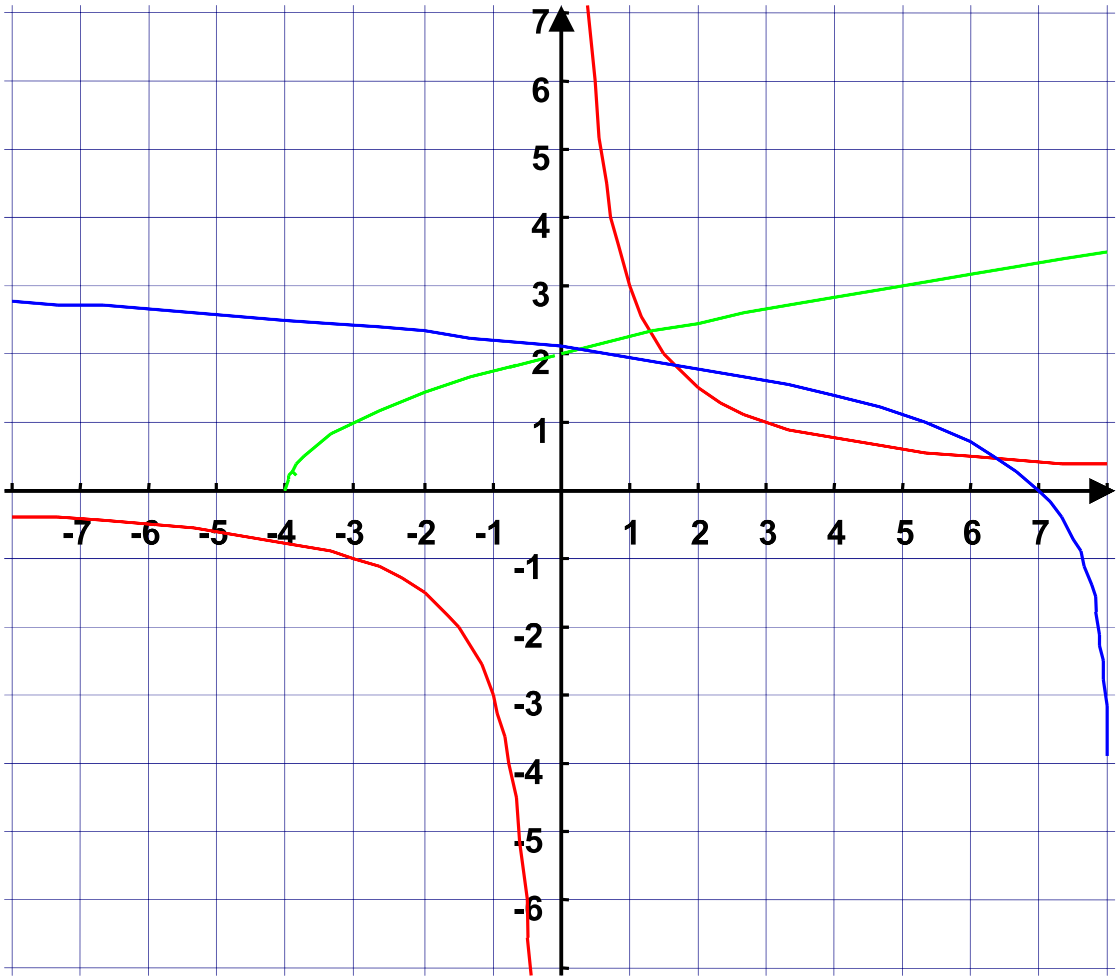
1. $f(x) = \frac{3}{x}$ on määratud, kui $x \neq 0$, $X_1 = R \setminus \{0\}$.
2. $g(x) = \sqrt{4 + x}$ on määratud, kui $4 + x \geq 0$, ehk $x \geq -4$, $X_2 = [-4; \infty[$.
3. $k(x) = \ln(8 - x)$ on määratud, kui $8 - x > 0$, ehk $x < 8$, $X_3 =]-\infty; 8[$.

Esialgse funktsiooni määramispiirkond on hulkade X_1; X_2 ja X_3 ühisosa.

Vastus: $X = [-4; 0[\cup]0; 8[$.



3. FUNKTSIOONIDE $y = \frac{3}{x}$, $y = \sqrt{4 + x}$ ja $y = \ln (8 - x)$ GRAAFIKUD



4. PERIOODILISED FUNKTSIOONID

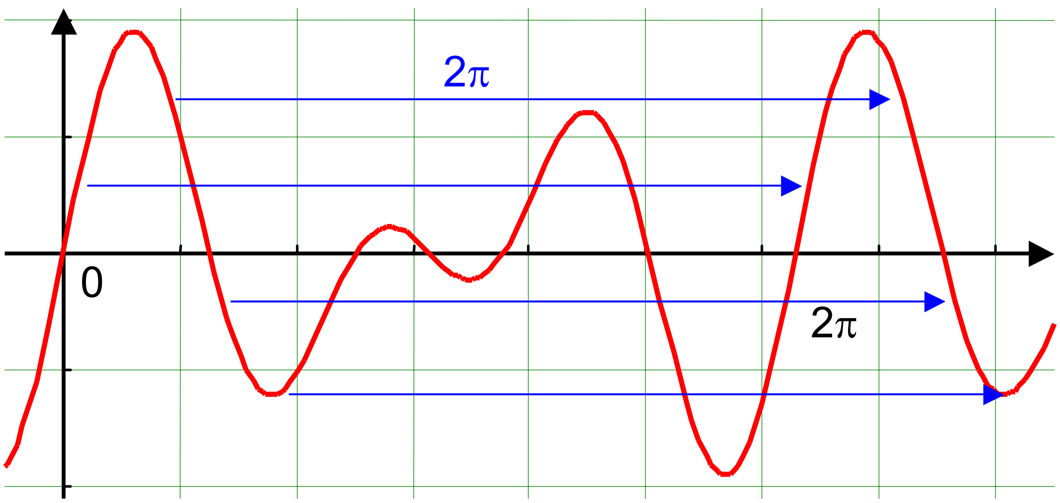
Funktsiooni nimetatakse *perioodiliseks perioodiga T*, kui iga x korral määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(x + T) = f(x)$.

1. Leiame funktsiooni $f(x) = \sin 3x + \sin 4x$ perioodi.

Funktsiooni $f(x)$ periood on liidetavate funktsioonide perioodide vähim ühiskordne.

Kui $g(x) = \sin 3x$, siis $T_1 = 2\pi:3$ ja kui $k(x) = \sin 4x$, siis $T_2 = 2\pi : 4 = \pi : 2$.

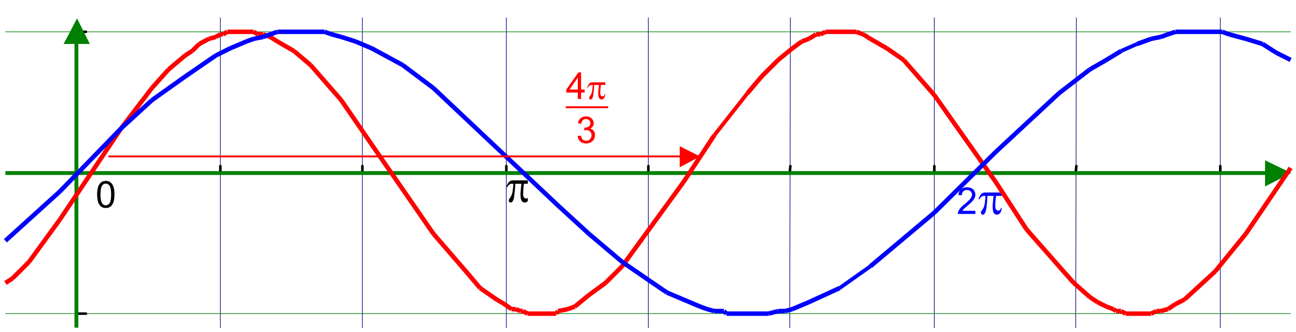
Seega otsitav periood on 2π.



2. Leiame funktsiooni $y = \sin (1{,}5x - 18°)$perioodi.

Siin $T = \frac{2\pi}{1.5} = \frac{4\pi}{3}$. Perioodi leidmiseks võib lahendada ka võrrandi

$\sin (1{,}5x - 18°) = \sin [1{,}5(x + T) - 18°]$.



5. FUNKTSIOONI $y = f(x)$ UURIMISE ÜLDINE SKEEM

Jrk	Mida leiame	Tähis	Kuidas leiame
1	Määramispiirkond	X	Reaalarvude hulgast R jätame välja kõik need muutuja väärtused, mille korral pole võimalik leida funktsiooni väärtust.
2	Muutumispiirkond	Y	Leitakse pöördfunktsiooni määramispk.
3	Nullkohad	X_0	Lahendatakse võrrand $f(x) = 0$
4	Positiivsuspiirkonnad Negatiivsuspiirkonnad	X^+ X^-	Lahendatakse võrratus $f(x) > 0$ Lahendatakse võrratus $f(x) < 0$
5	Kasvamisvahemikud Kahanemisvahemikud	$X^{\uparrow}$ $X^{\downarrow}$	Leitakse funktsiooni esimene tuletis $f'(x)$ Lahendatakse võrratus $f'(x) > 0$ Lahendatakse võrratus $f'(x) < 0$
6	Ekstreemumkohad, nende liigid	x_{max} x_{min}	Lahendatakse võrrand $f'(x) = 0$. Sobivad vaid need võrrandi lahendid, mille korral tuletis muudab märki. Ekstreemumkoha liik määratakse teise tuletise abil: Kui $f''(x) > 0$, siis x on miinimumkoht, Kui $f''(x) < 0$, siis x on maksimumkoht x on siin võrrandi $f'(x) = 0$ lahend
7	Ekstreemumid	y_{max} y_{min}	Maksimumid: $y_{max} = f(x_{max})$, Miinimumid: $y_{min} = f(x_{min})$
8	Ekstreemumpunktid	P_{max} P_{min}	Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punktid $P_{max}(x_{max}; y_{max})$ ja $P_{min}(x_{min}; y_{min})$
9	Funktsiooni graafiku käänukohad	x_k	Lahendatakse võrrand $f''(x) = 0$
10	Käänupunktid	P_k	Punktid koordinaatidega $P_k(x_k; y_k)$, kus $y_k = f(x_k)$
11	Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus	$X^{\frown}$ $X^{\smile}$	Kumeruspiirkonnad: $f''(x) < 0$, Nõgususpiirkonnad: $f''(x) > 0$

Täiendavalt võib kontrollida, kas funktsioon on paaris või paaritu (või pole kumbki). Võib arvutada ka piirväärtused $\lim f(x)$, kus $x \to \pm\infty$ või $x \to a-$ ja $x \to a+$, kus a on funktsiooni graafiku katkevuskoht.

6. FUNKTSIOONI $y = x^3 - 4x^2$ TÄIELIK UURIMINE

1. Funktsiooni määramispiirkond.

$X = R$, sest funktsiooni määrav avaldis ei sisalda murde, astmeid, trigonomeetrilisi funktsioone, logaritme jne. Muutuja x mistahes väärtuse korral saab y väärtust leida.

2. Funktsiooni muutumispiirkond

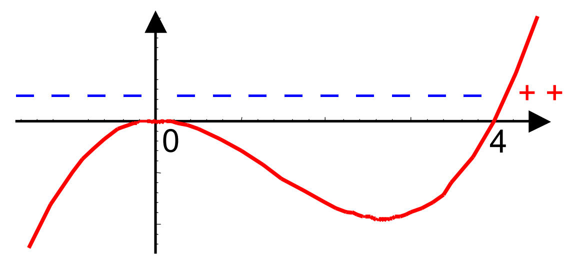
Vt lõppu.

3. Funktsiooni nullkohad.

Lahendame võrrandi $x^3 - 4x^2 = 0$, $x^2(x-4) = 0$, millest $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$.
Nullkohtade hulk on $X_0 = \{0; 4\}$.

4. Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

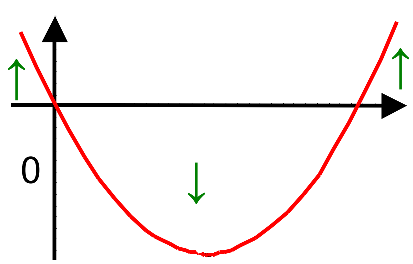
Skitseerime funktsiooni ligikaudse graafiku.
Joone skitseerimisel arvestame sellega, et **0 on kahekordne nullkoht**, seega pöördub joon seal tagasi.



$X^+ =]4; \infty[$, $X^- =]-\infty; 0[\cup]0; 4[$

5. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Leiame $f'(x)$.
$f'(x) = 3x^2 - 8x$
Kasvamisvahemikes $f'(x) > 0$ ning kahanemisvahemikes $f'(x) < 0$. Skitseerime tuletis-funktsiooni ligikaudse graafiku ja leiame sealt vastavad vahemikud.



Tuletise graafik läbib x-telge punktides 0 ja $\frac{8}{3}$ (need on võrrandi $3x^2 - 8x = 0$ lahendid).

$X^{\uparrow} =]-\infty; 0[$, $X^{\uparrow} =]\frac{8}{3}; \infty[$, $X^{\downarrow} =]0; \frac{8}{3}[$

6. Funktsiooni ekstreemumkohad, nende liik.

Ekstreemumkohad võivad olla vaid $x = 0$ ja $x = \frac{8}{3}$. Ekstreemumkoha liigi määrame teise tuletise $f''(x) = 6x - 8$ abil.
Et $f''(0) = -8 < 0$, siis $x = 0$ on maksimumkoht: $x_{max} = 0$,
$f''(\frac{8}{3}) = 8 > 0$, siis $x = \frac{8}{3}$ on miinimumkoht: $x_{min} = \frac{8}{3}$.

7. Ekstreemumid.

Funktsiooni ekstreemumite leidmiseks leiame $f(0)$ ja $f(\frac{8}{3})$.

$y_{max} = f(x_{max}) = 0^3 - 4\cdot 0^2 = 0$,

$y_{min} = f(x_{min}) = (\frac{8}{3})^3 - 4\cdot\frac{8}{3} = \frac{-256}{27}$.

8. Funktsiooni graafiku ekstreemumpunktid.

$P_{max}(0; 0)$ ja $P_{min}(\frac{8}{3}; \frac{-256}{27})$.

9. Graafiku käänukohad, käänupunktid.

Käänukohal $f''(x) = 0$ ja teine tuletis muudab märki.

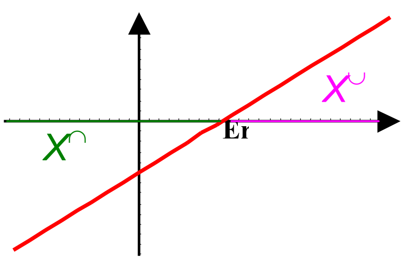
Lahendame võrrandi $6x - 8 = 0$, millest $x_k = \frac{4}{3}$.

Leiame nüüd $y_k = f(x_k) = \frac{-128}{27}$.

Käänupunkt on $P_k(\frac{4}{3}; \frac{-128}{27})$.

10. Funktsiooni graafiku nõgusus ka kumerus.

Skitseerime teise tuletise graafiku ja loeme sellelt vastavad piirkonnad.



Graafiku nõgususpiirkond $X^{\cup} =]\frac{4}{3}; \infty[$,

kumeruspiirkond $X^{\cap} =]-\infty; \frac{4}{3}[$.

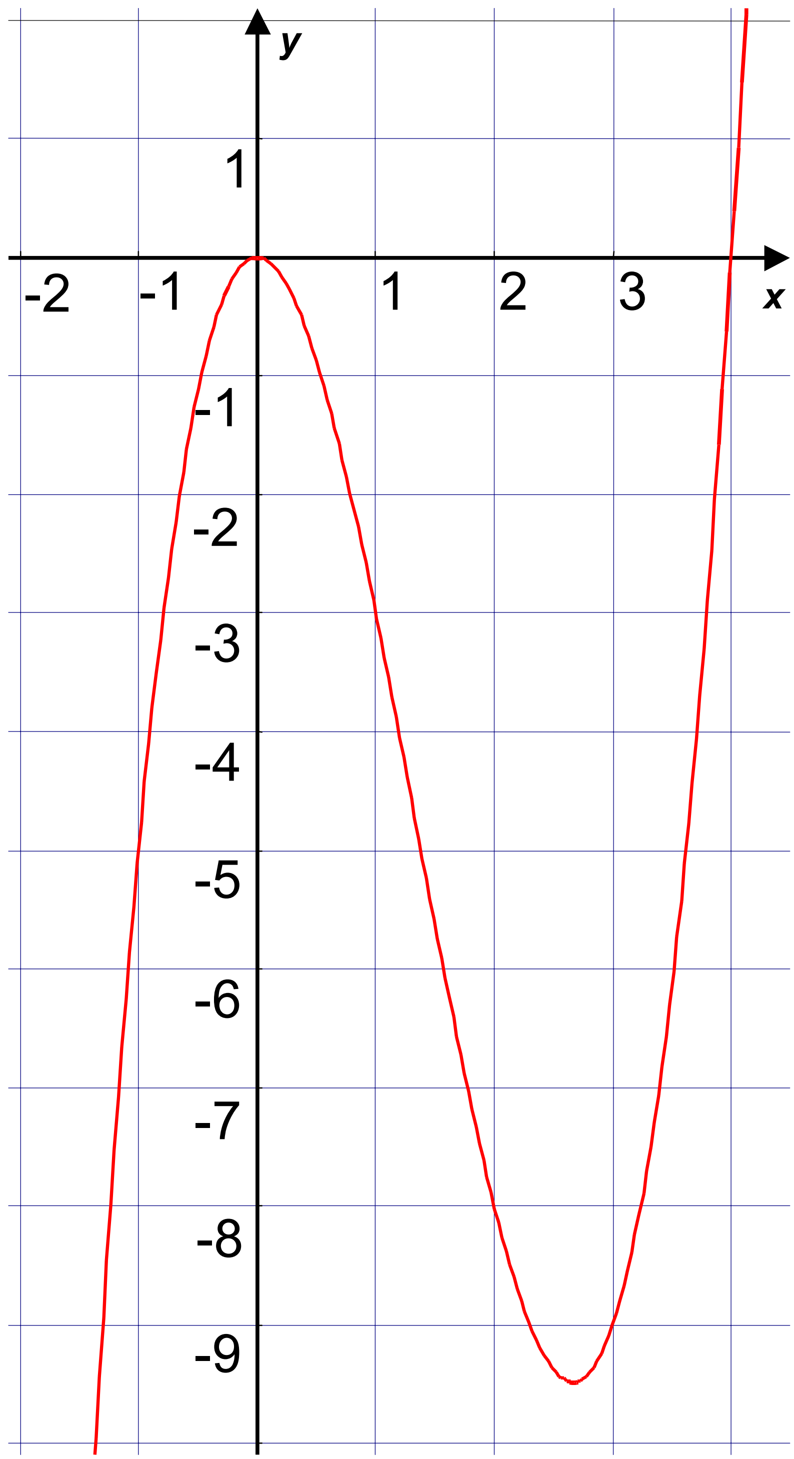
Eespool jäi leidmata funktsiooni muutumispiirkond. Arvestades seda, et funktsioonil ei ole katkevuskohti ning

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 4x^2) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4x^2) = -\infty$$

saab öelda, et funktsiooni muutumispiirkonnaks on reaalarvude hulk: $Y = R$.

Saadud tulemuste järgi skitseerime nüüd funktsiooni $y = x^3 - 4x^2$ graafiku.

7. FUNKTSIOONI $y = x^3 - 4x^2$ GRAAFIK



8. FUNKTSIOONI $f(x) = \dfrac{4x-3}{2-3x}$ TÄIELIK UURIMINE

1. Määramispiirkond

Funktsioon pole määratud, kui $2 - 3x = 0$, ehk $x = \frac{2}{3}$. Seega $X = R \setminus \{\frac{2}{3}\}$ või

$X =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$.

2. Muutumispiirkond.

Funktsiooni $y = \frac{4x-3}{2-3x}$ pöördfunktsioon on $y = \frac{2x+3}{3x+4}$. Selle funktsiooni määramispiirkond on $R \setminus \{-\frac{4}{3}\}$, mis ongi esialgse funktsiooni muutumispiirkond:

$Y = R \setminus \{-\frac{4}{3}\}$.

3. Funktsiooni nullkohad.

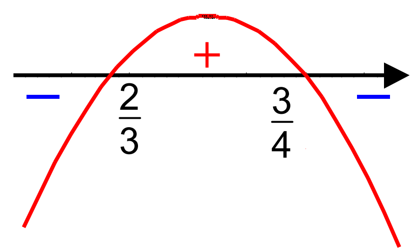
Funktsiooni $f(x)$ väärtus on 0, kui murru lugeja on 0 ja nimetaja nullist erinev.
$X_0 = \{0{,}75\}$.

4. Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

Lahendame võrratused $\frac{4x-3}{2-3x} > 0$ ja $\frac{4x-3}{2-3x} < 0$.

Jooniselt loeme vastavad piirkonnad:

$X^{+} =]\frac{2}{3}; \frac{3}{4}[$, $X^{-} =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{3}{4}; \infty[$.



5. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Leiame funktsiooni esimese tuletise $f'(x) = \frac{-1}{(2-3x)^2}$. Kuna tuletis on kogu funktsiooni määramispiirkonnas negatiivne, siis

$X^{\uparrow} = \varnothing$ ja $X^{\downarrow} = R \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

6. Funktsiooni ekstreemumkohad.

Puuduvad.

7. ja 8. Ekstreemumid ja ekstreemumpunktid.

Puuduvad.

9. Funktsiooni graafiku käänukohad, käänupunktid.

Leiame funktsiooni teise tuletise $f''(x) = \dfrac{6}{(3x-2)^3}$.

Graafikul pole käänukohti, sest võrrandil $\dfrac{6}{(3x-2)^3} = 0$ pole lahendeid.

Samuti puuduvad käänupunktid.

10. Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus.

Kui $x > \dfrac{2}{3}$, siis $\dfrac{6}{(3x-2)^3} > 0$. Kui $x < \dfrac{2}{3}$, siis $\dfrac{6}{(3x-2)^3} < 0$.

Seega $X^{\cup} =]\dfrac{2}{3}; \infty[$ ja $X^{\cap} =]-\infty; \dfrac{2}{3}[$.

11. Arvutame piirväärtused.

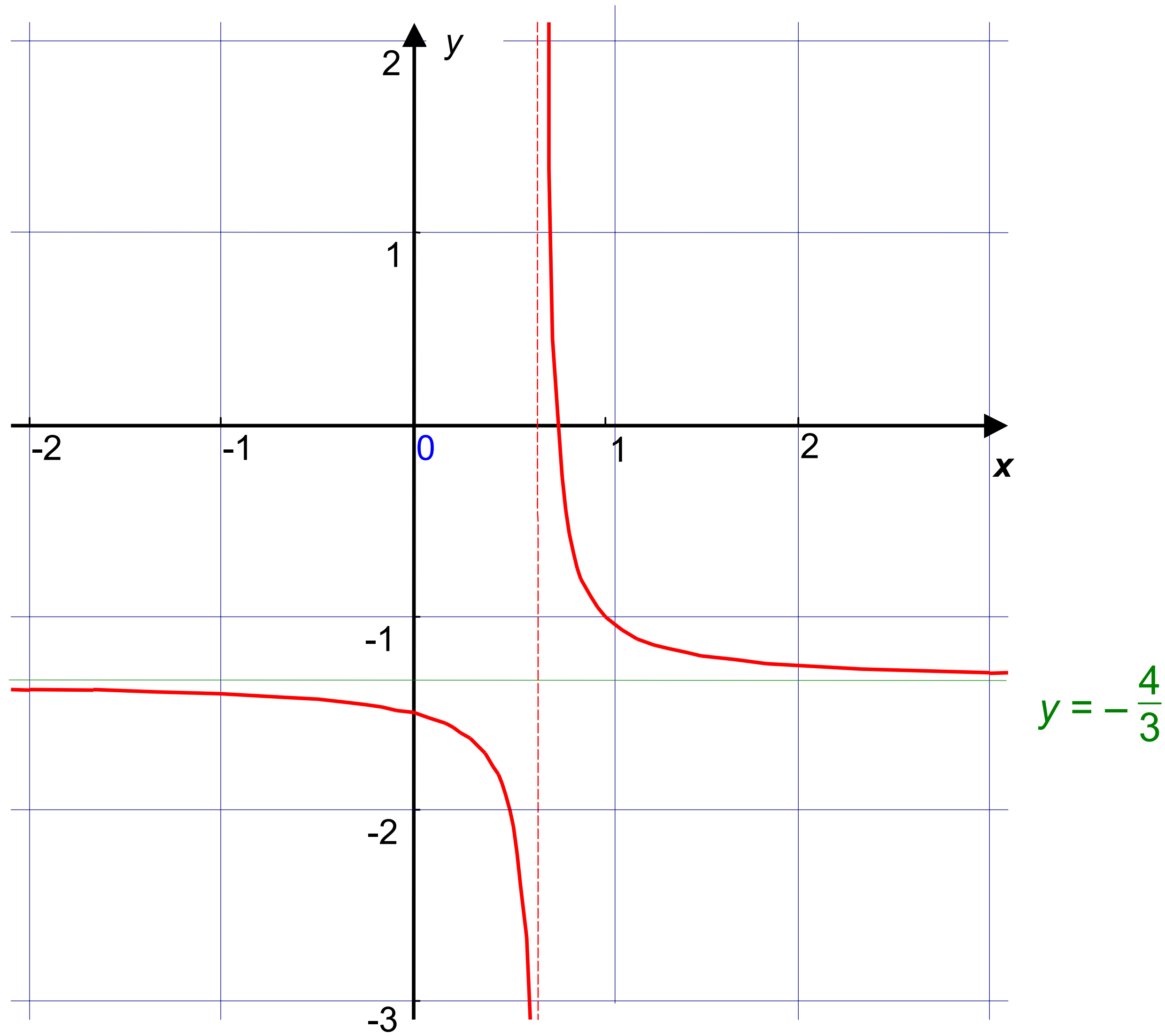
Kuna funktsioonil on kohal $x = \dfrac{2}{3}$ katkevuskoht, siis leiame piirväärtused protsessides $x \to \pm\infty$ ja $x \to \dfrac{2}{3}+$ ja $x \to \dfrac{2}{3}-$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2-3x} = -\frac{4}{3} \qquad \lim_{x\to\frac{2}{3}-} \frac{4x-3}{2-3x} = -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{2}{3}+} \frac{4x-3}{2-3x} = \infty$$

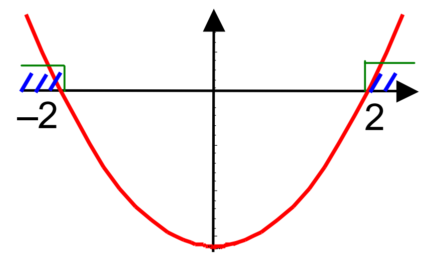
Funktsioon ei ole paaris ega paaritu, samuti pole perioodiline.

Saadud tulemuste alusel joonestame funktsiooni graafiku.

9. FUNKTSIOONI $f(x) = \dfrac{4x-3}{2-3x}$ GRAAFIK



10. FUNKTSIOONI $y = \sqrt{x^2 - 4}$ TÄIELIK UURIMINE



1. Funktsiooni määramispiirkond.

Et juuritav peab olema mittenegatiivne, siis lahendame ruutvõrratuse $x^2 - 4 \geq 0$.
Seega $X =]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$.

2. Funktsiooni muutumispiirkond.

Juure väärtused saavad olla vaid mittenegatiivsed. Kui $x \to \pm\infty$, siis $y \to \infty$, seega $Y = [0; \infty[$.
Sama tulemuseni jõuaksime pöördfunktsiooni uurides.

3. Funktsiooni nullkohad.

$\sqrt{x^2 - 4} = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$.
Seega $X_0 = \{-2; 2\}$.

4. Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

$X^+ =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$ ja $X^- = \varnothing$.

5. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Leiame $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $f'(x) > 0$, kui $x > 2$ ning $f'(x) < 0$, kui $x < -2$.
Seega $X^{\uparrow} =]2; \infty[$ ja $X^{\downarrow} =]-\infty; -2[$.

6. 7. ja 8. Ekstreemumkohad, ekstreemumid ja ekstreemumpunktid.

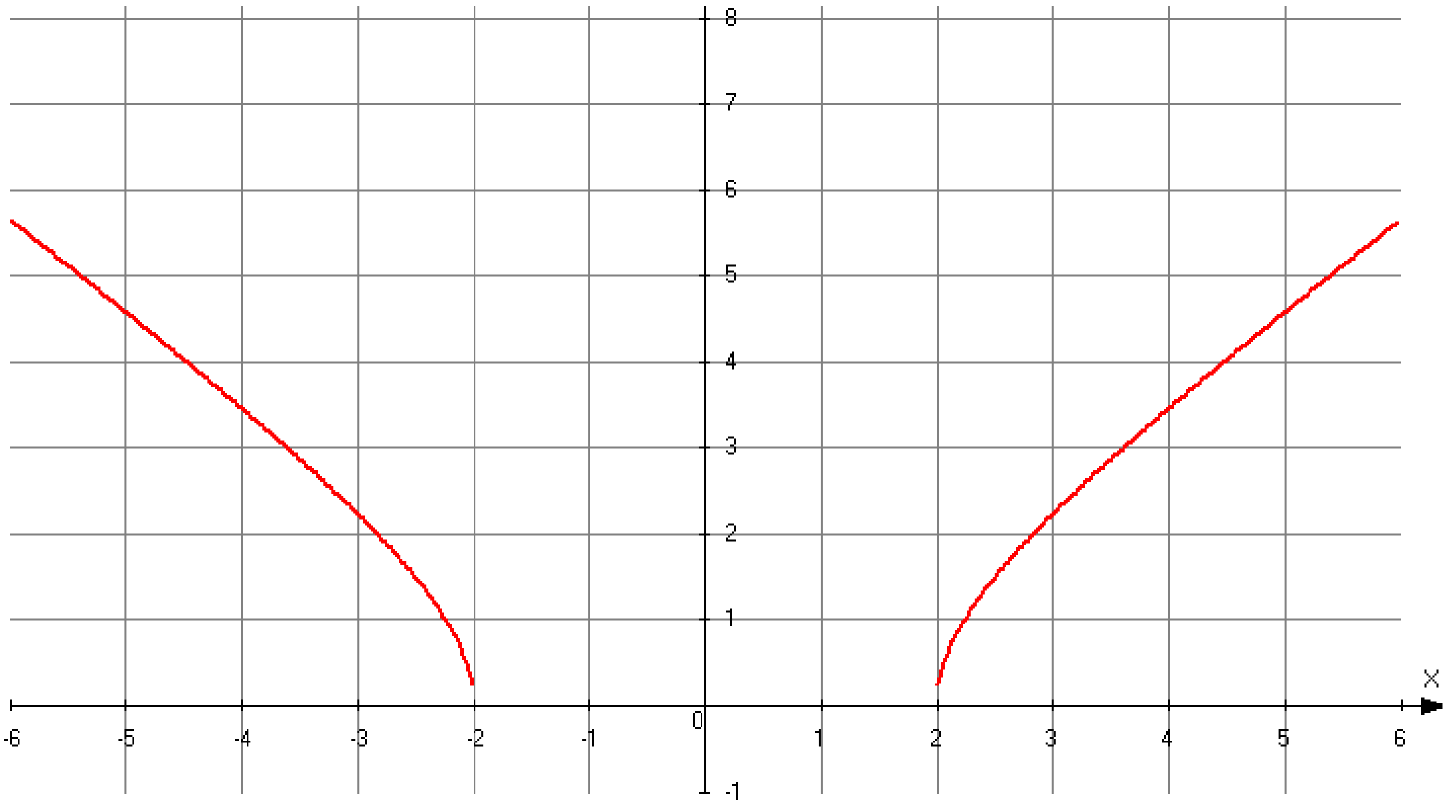
Tuletis ei võrdu ühegi x väärtusel 0-ga, seega
Ekstreemumkohad, ekstreemumid ja ekstreemumpunktid puuduvad.

9. ja 10. Funktsiooni graafiku käänukohad. Graafiku nõgusus ja kumerus.

Leiame funktsiooni teise tuletise $f''(x) = \dfrac{-16}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$
Kuna $f''(x) < 0$ kogu funktsiooni määramispiirkonnas, siis käänukohad ja käänupunktid puuduvad.
Samuti puudub graafikul nõgususpiirkond.
Graafiku kumeruspiirkond on $X^{\frown} =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

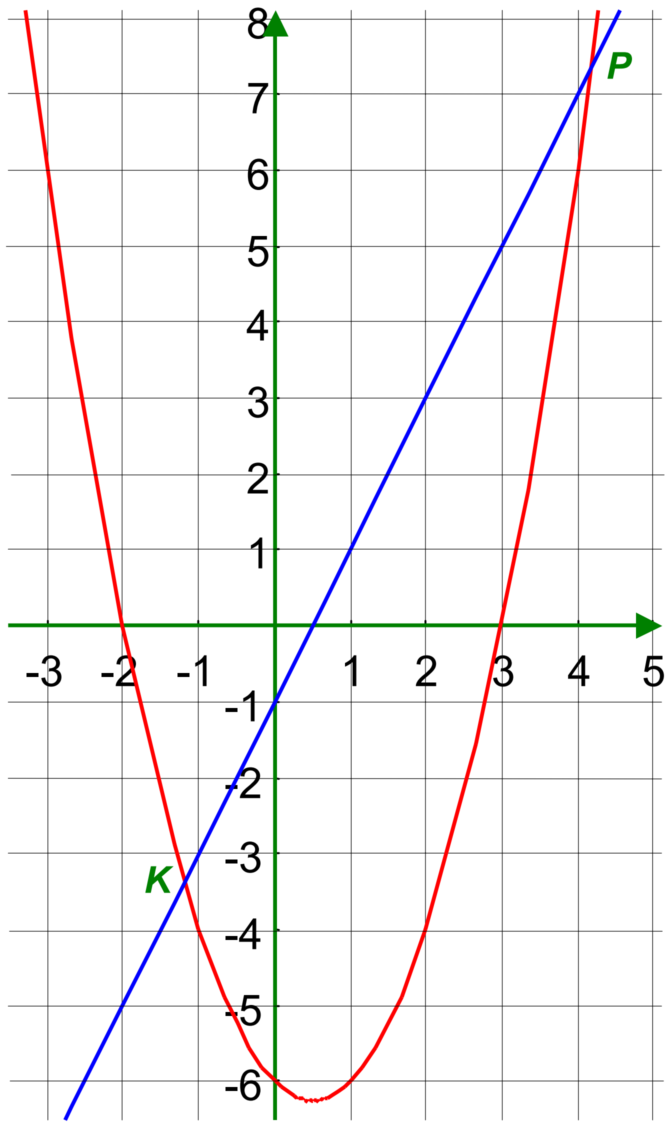
Funktsioon on paarisfunktsioon, sest iga x korral määramispiirkonnast
$\sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4}$.

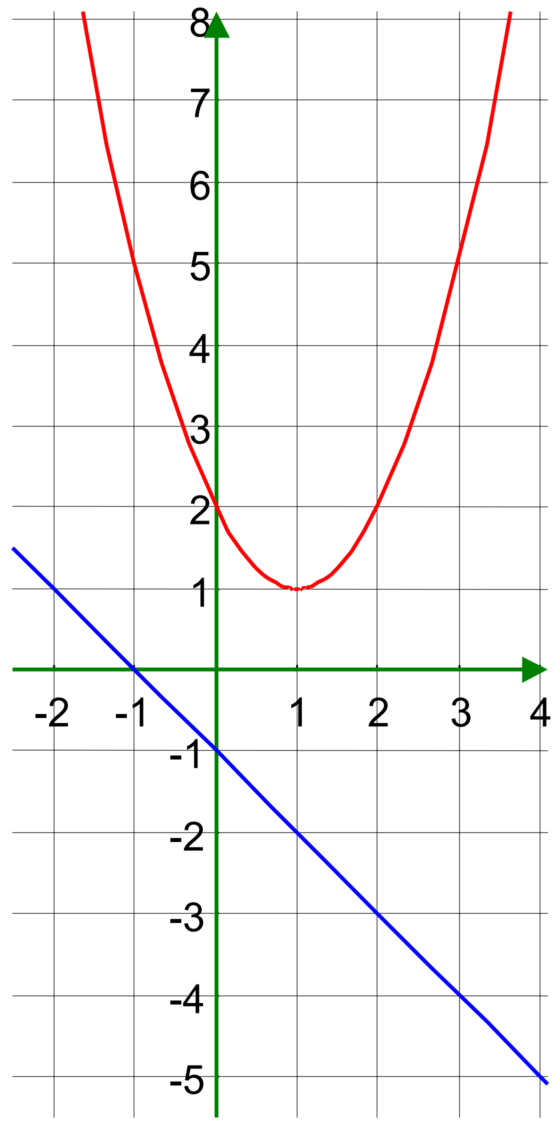
11. FUNKTSIOONI $y = \sqrt{x^2 - 4}$ GRAAFIK



12. JOONTE LÕIKEPUNKTIDE LEIDMISE ÜLESANNE I

$y = x^2 - x - 6$ $y = 2x - 1$	$x + y + 1 = 0$ $y = x^2 - 2x + 2$





$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

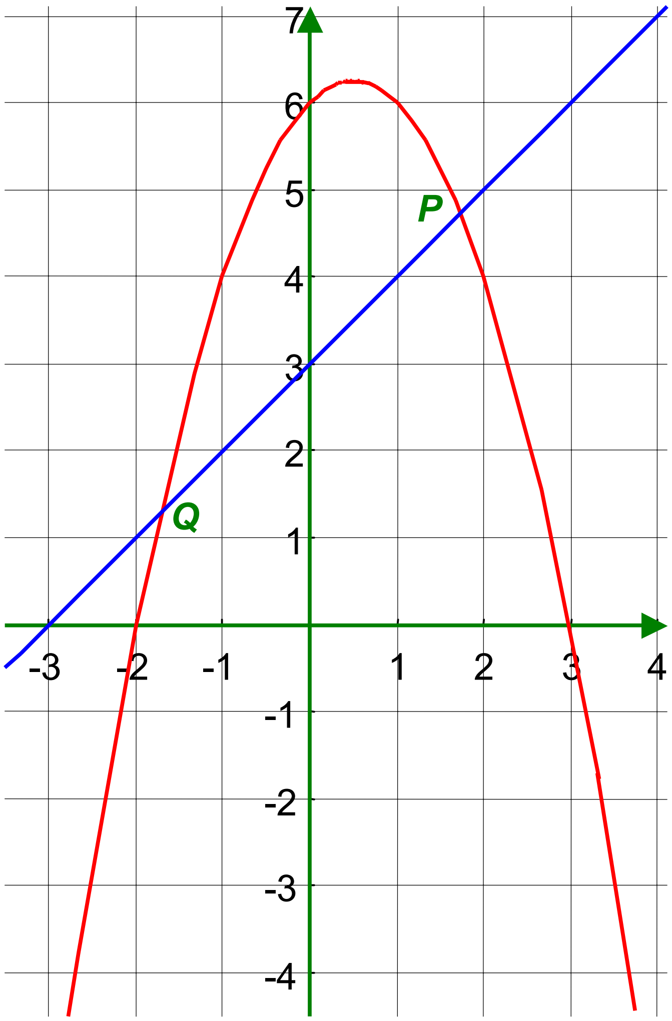
Lahendatakse võrrandisüsteem
Joonte lõikepunktid on
$P(1{,}5 + \sqrt{7.25}\ ;2 + 2\sqrt{7.25}\ )$
$K(1{,}5 - \sqrt{7.25}\ ;2 - 2\sqrt{7.25}\ )$

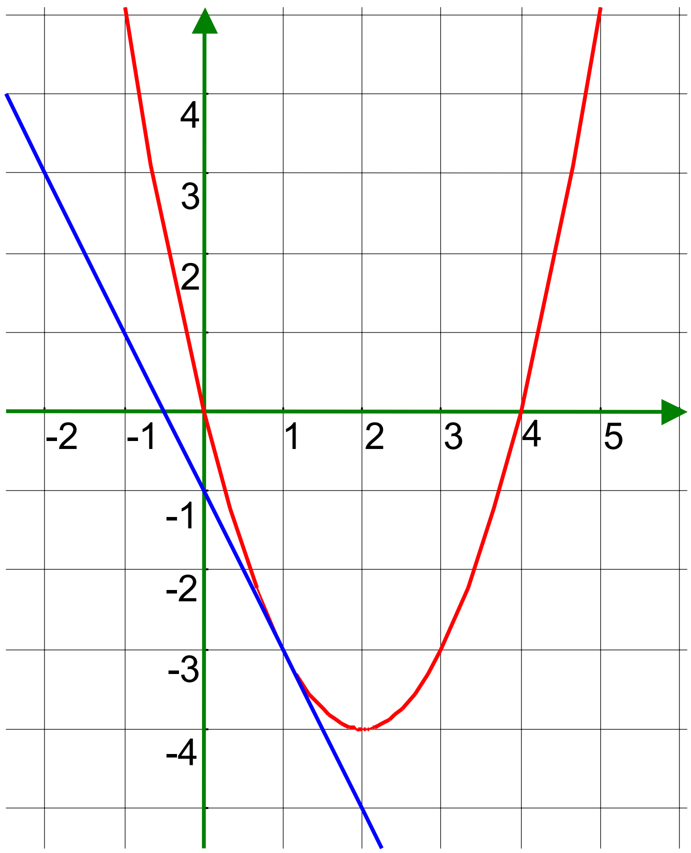
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemil
lahendeid ei ole, jooned ei lõiku.

13. JOONTE LÕIKEPUNKTIDE LEIDMISE ÜLESANNE II

$x - y + 3 = 0$ $y = -x^2 + x + 6$	$x^2 - 4x - y = 0$ $y + 2x + 1 = 0$





Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + x + 6 \end{cases}$$

Joonte lõikepunktid on
$P(\sqrt{3}\,;\, 3+\sqrt{3})$ ja
$Q(-\sqrt{3}\,;\, 3-\sqrt{3})$

Lahendame võrrandisüsteemi

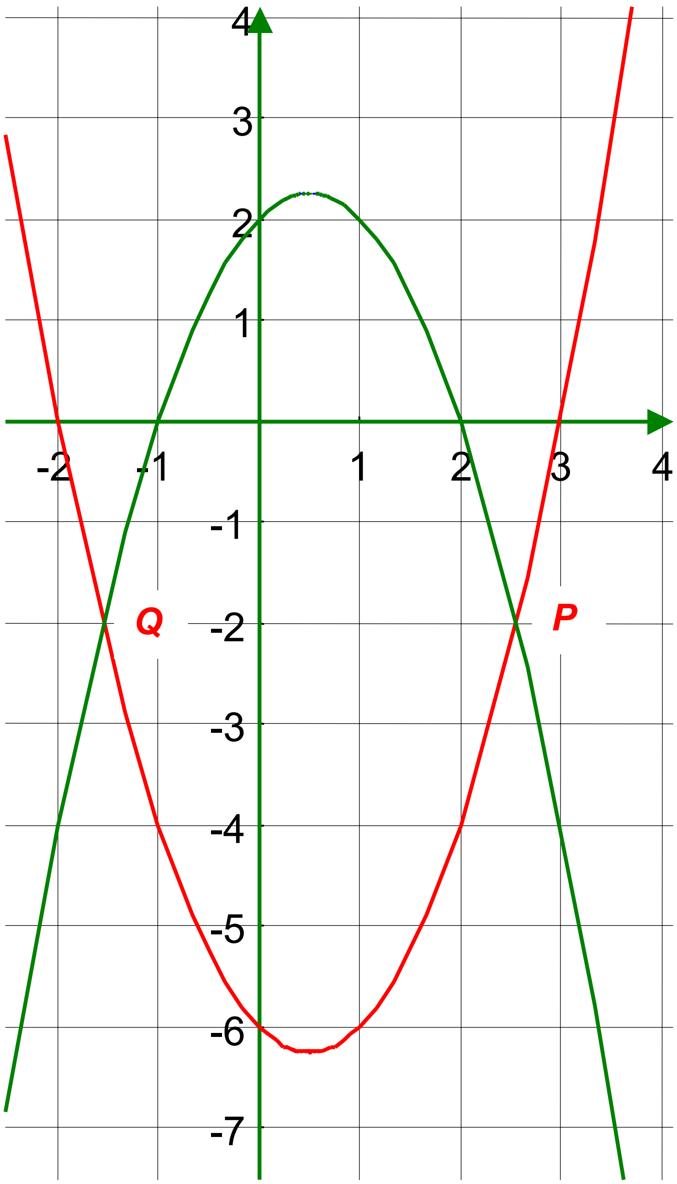
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

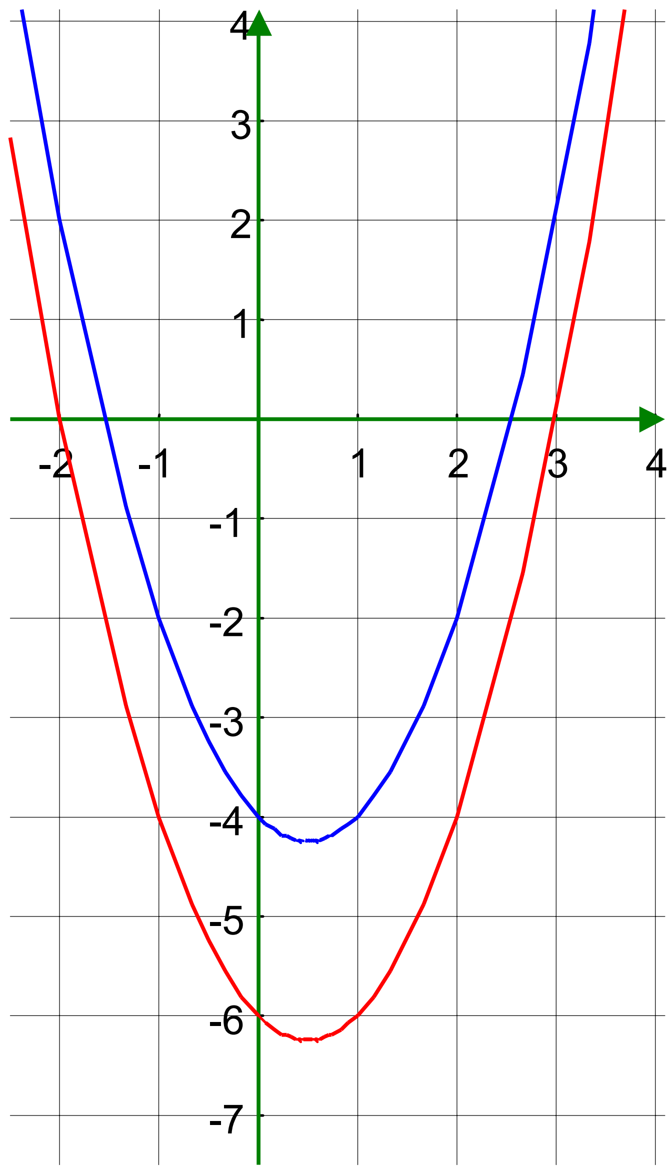
Sirge $y = -2x - 1$ on parabooli
$y = x^2 - 4x$ puutuja punktis (1; –3).

14. JOONTE LÕIKEPUNKTIDE LEIDMISE ÜLESANNE III

$y = x^2 - x - 6$ $y = -x^2 + x + 2$	$y = x^2 - x - 6$ $y = x^2 - x - 4$

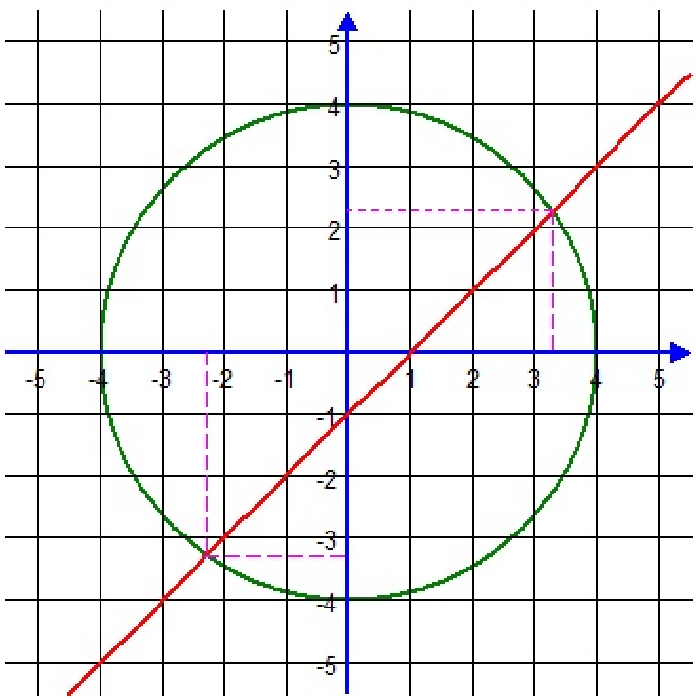
Lõikepunktid leidke iseseisvalt!

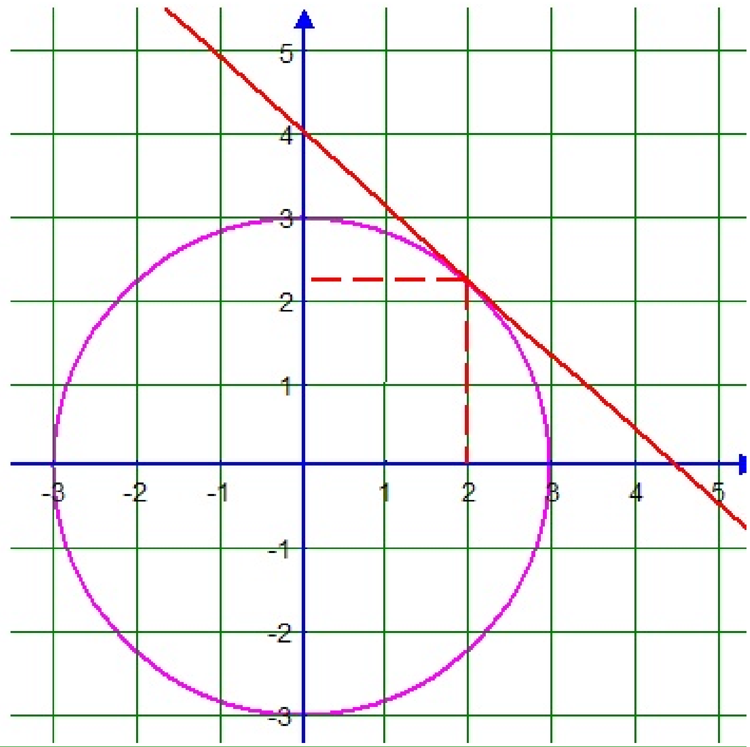




15. JOONTE LÕIKEPUNKTIDE LEIDMISE ÜLESANNE IV

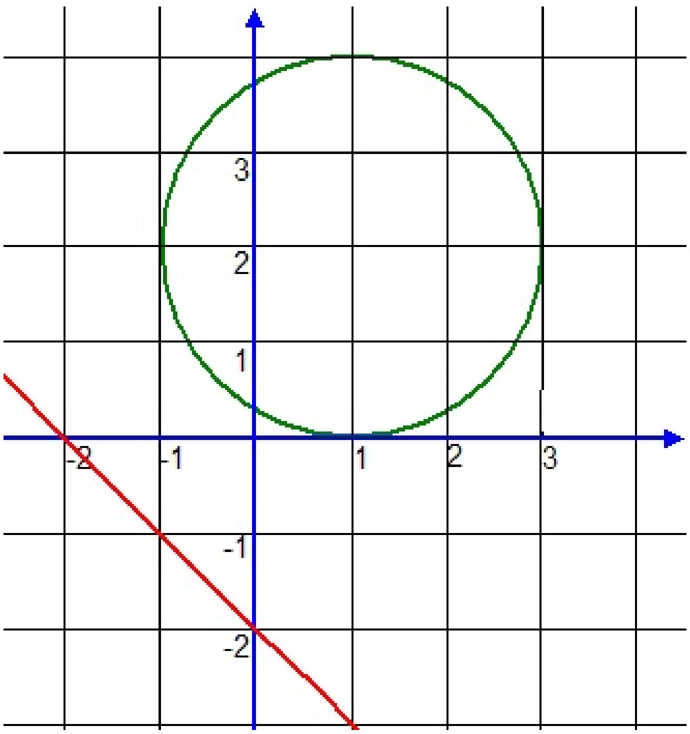
$y = x - 1$ $x^2 + y^2 = 16$	$y = \dfrac{\sqrt{5}(-2x+9)}{5}$ $x^2 + y^2 = 9$

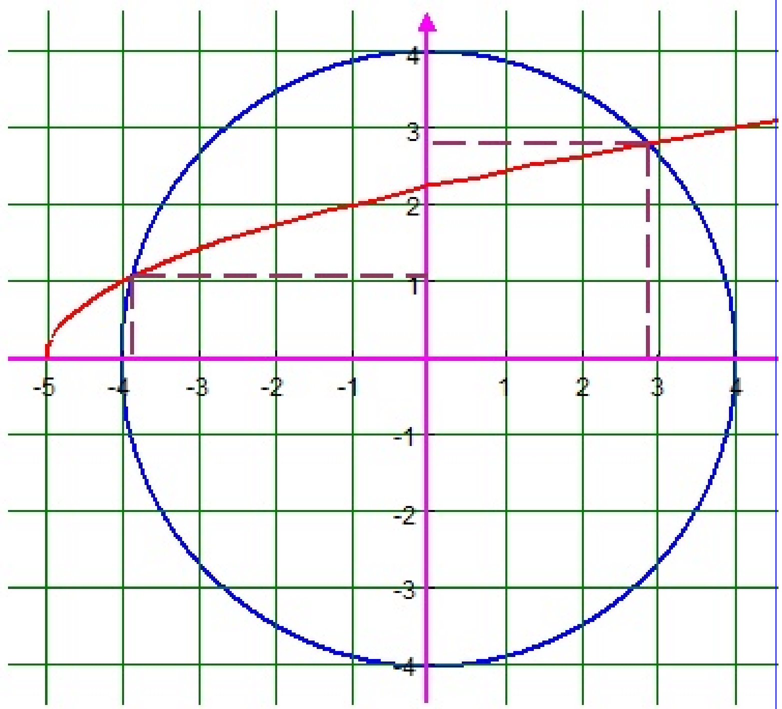




16. JOONTE LÕIKEPUNKTIDE LEIDMISE ÜLESANNE V

$y = x - 1$ $x^2 + y^2 = 16$	$y = \dfrac{\sqrt{5}(-2x + 9)}{5}$ $x^2 + y^2 = 9$





17. NEWTON - LEIBNIZI VALEMI RAKENDAMINE

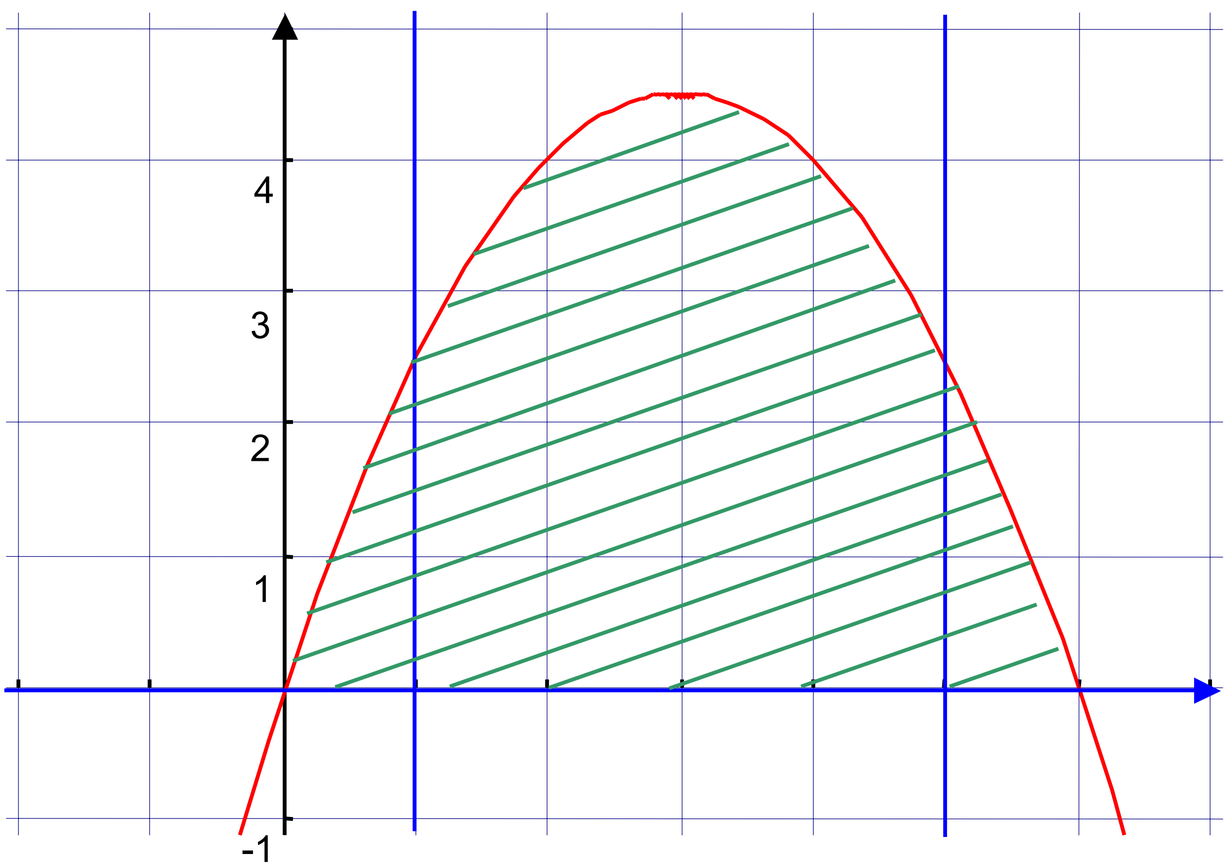
Pinnatüki pindala arvutamisel kasutatakse Newton-Leibnizi valemit:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

kus $F'(x) = f(x)$.

1. Pinnatükk asub *x* - teljest ülevalpool.

Leiame joontega $y = 0{,}5(-x^2 + 6x)$, $x = 1$, $x = 5$ ja $y = 0$ piiratud pinnatüki pindala.

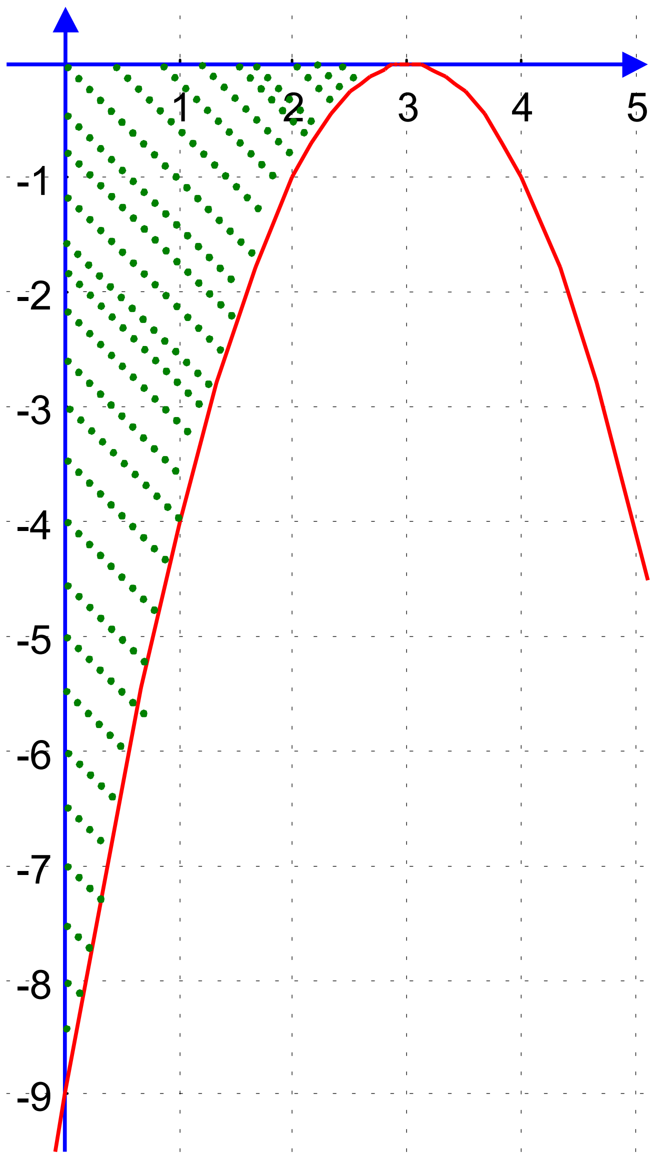


$$S = \int_1^5 \left(-0{,}5x^2 + 3x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{6} + 1{,}5x^2\right)\Bigg|_1^5 = 15\frac{1}{3} \text{ pindalaühikut}$$

2. Pinnatükk asub *x*-teljest allpool.

Sel juhul $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

Leiame joontega $y = -(x-3)^2$, $y = 0$ ja $x = 0$ piiratud pinnatüki pindala.



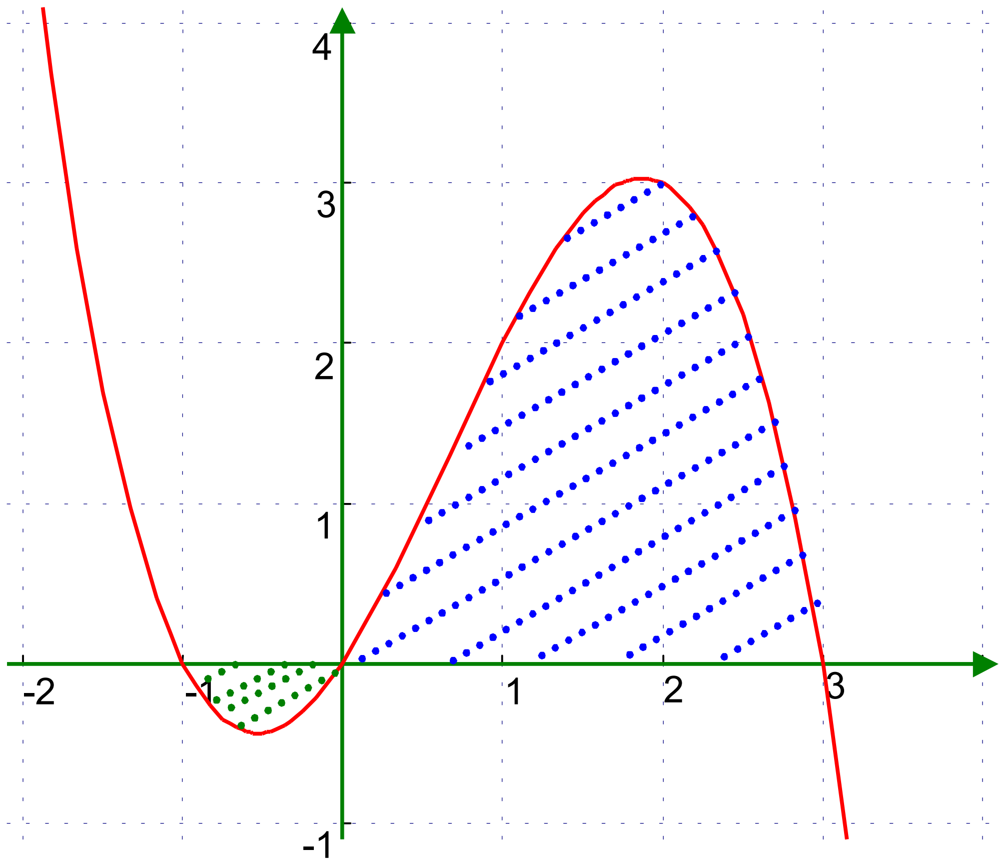
$$S = \int_0^3 (x-3)^2 dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 9 - 27 + 27 = 9 \text{ pü.}$$

3. Pinnatükk koosneb mitmest osast.

Leiame viirutatud pinnatüki pindala, kui seda piiravad jooned
$y = 0{,}5(-x^3 + 2x^2 + 3x)$ ja x-telg.



Tuleb arvutada kahe pinnatüki pindala :

1) roheliseks värvitud pinnatükk;
2) siniseks värvitud pinnatükk.

$S_1 = \frac{7}{24}$ pü

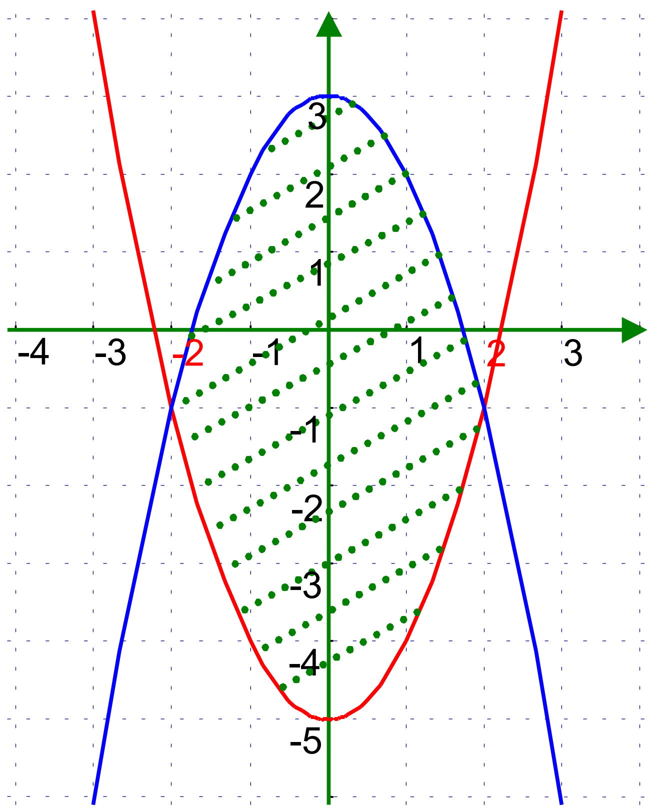
$S_2 = 5{,}625$ pü.

$S = S_1 + S_2 = 5\frac{11}{12}$ pindalaühikut.

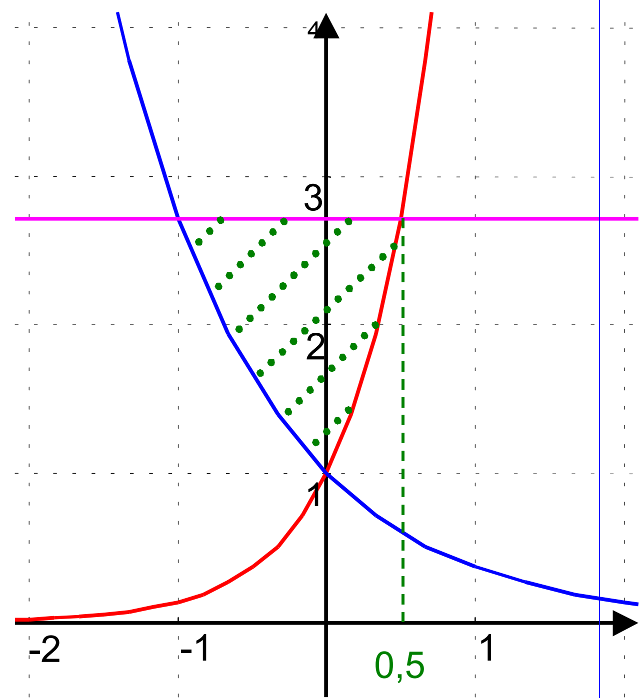
3. Pinnatükki piiravad mitu joont.

1. Leiame pinnatüki pindala kui seda piiravad jooned

$y = x^2 - 5$ ja $y = -x^2 + 3$.



2. Pinnatükki piiravad jooned $y = e^{2x}$, $y = e^{-x}$ ja $y = e$.



S = 1,5 pindalaühikut

1. Leitakse integreerimise rajad, selleks lahendatakse võrrand $f(x) = g(x)$.
2. Arvutatakse pindala.

$S = 21\frac{1}{3}$ pü.

18. TEHTED VEKTORITEGA TASANDIL JA RUUMIS

On antud tasandivektorid $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2)$ ning ruumivektorid $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ja $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

Tasandil

Vektorite summa $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

Vektorite vahe $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$

Vektori korrutis arvuga $k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$

Vektorite kollineaarsus $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

Vektori pikkus $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Vektorite skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Nurk vektorite vahel $\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

Ruumivektorite korral kehtivad samad valemid, kuid tuleb arvestada sellega, et ruumivektoril on kolm koordinaati.

19. VEKTORITE KOMPLANAARSUS

Ruumi kolm vektorit $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ ja $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$

on komplanaarsed parajasti siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud kolmerealine determinant võrdub nulliga.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Komplanaarsus tähendab ühel tasandil asumist.

Näide 1. Kontrollime, kas vektorid $\vec{a} = (1;0;0)$, $\vec{b} = (0;1;0)$ ja $\vec{c} = (0;0;1)$ on komplanaarsed.

Arvutame determinandi $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, seega need vektorid ei ole komplanaarsed.

Näide 2. Vektorid $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;4;6)$, $\vec{c} = (-2;5;7)$ on komplanaarsed, sest

determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

20. SIRGE JA TASANDI VÕRRANDID RUUMIS

Kahe punktiga määratud sirge võrrand ruumis

On antud punktid A(x_1; y_1; z_1) ja B(x_2; y_2; z_2).

Nende punktidega määratud sirge võrrand on $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Punkti ja normaalvektoriga määratud tasandi võrrand

Tasand läbib punkti P(x_1; y_1; z_1) ja on risti vektoriga $\vec{n}=(A;B;C)$
Tasandi võrrand on $(x-x_1)\cdot A+(y-y_1)\cdot B+(z-z_1)\cdot C=0$

Tasandi üldvõrrand

$Ax+By+Cz+D=0$, kus A, B ja C on tasandi normaalvektori koordinaadid.

Ühe punkti ja kahe mittekollineaarse vektoriga määratud tasandi võrrand

On antud punkt P(x_1; y_1; z_1) ja kaks mittekollineaarset vektorit
$\vec{a}=(a;b;c)$ ja $\vec{b}=(d;e;f)$.
Sel juhul saab tasandi võrrandi leida kolmerealise determinandi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=0 \text{ abil.}$$

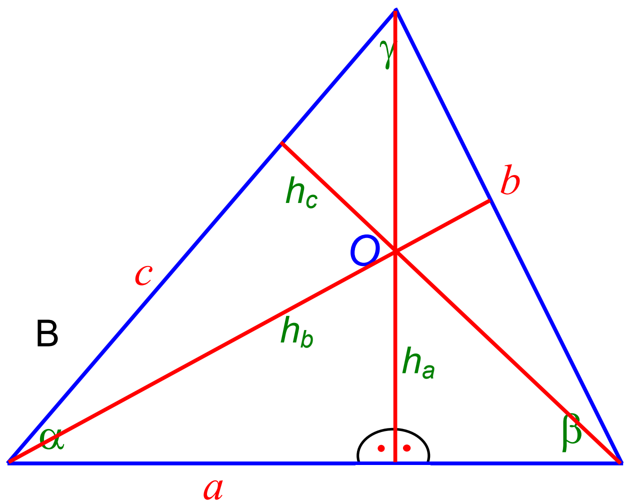
Kolme punktiga määratud tasandi võrrand

On antud punktid P_1(x_1; y_1; z_1), P_2(x_2; y_2; z_2) ja P_3(x_3; y_3; z_3). Nende punktidega määratud tasandi võrrand on

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Selle alajuhtumi võib asendada eelmisega, kuna vektorid $\overrightarrow{P_1P_2}$ ja $\overrightarrow{P_1P_3}$ on mittekollineaarsed.

21. MEETRILISED SEOSED KOLMNURGAS

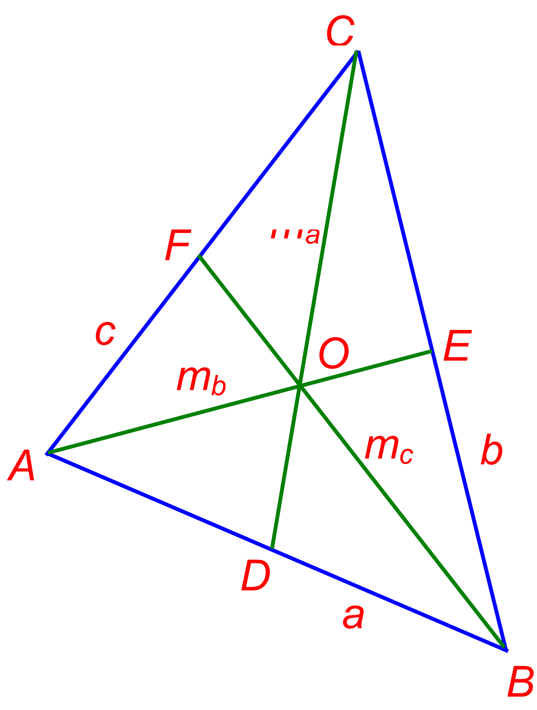


- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ - sisenurkade summa
- $a + b > c$, $a + c > b$ ja $b + c > a$
- kolmnurga kõrgused h_a, h_b ja h_c lõikuvad ühes punktis
- teravnurkses kolmnurgas asub punkt O kolmnurga sees, täisnurkses küljel ja nürinurkses väljaspool kolmnurka

Pindala $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$

$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

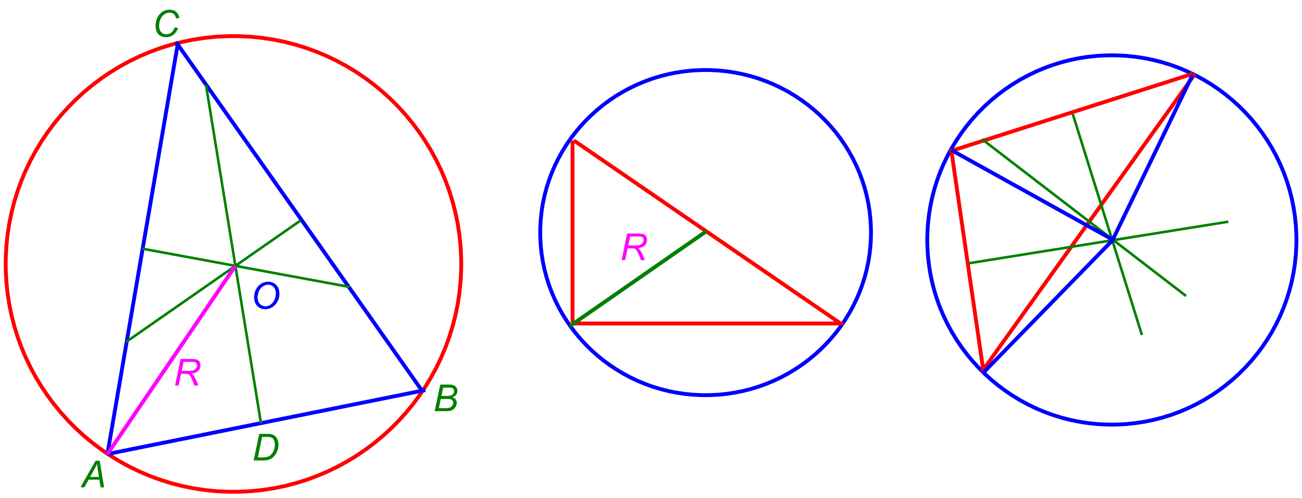
Mediaanid ehk küljepoolitajad



1. lõikuvad ühes punktis
2. BO:OF = CO:OD = AO:OE = 2 : 1
3. Mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks osaks, näiteks $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta DBC}$
4. Kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks.
5. Punkti O nimetatakse ka *raskuskeskmeks*.
6. $m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} =$
   $= 0{,}5\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$

22. MEETRILISED SEOSED KOLMNURGAS II

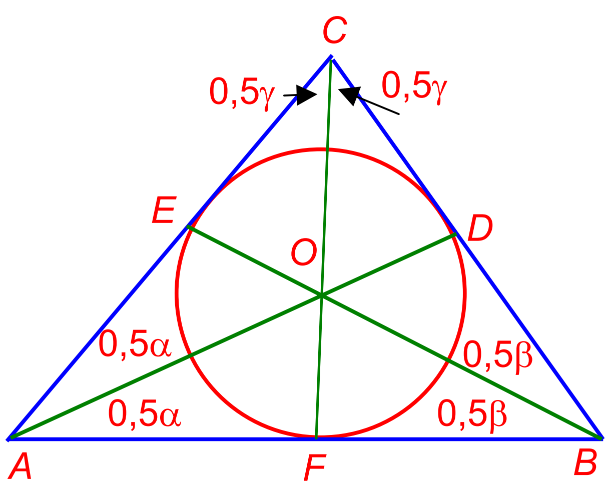
Kolmnurga ümberringjoon



Ümberringjoone keskpunkt asub *keskristsirgete lõikepunktis*. Täisnurkses kolmnurgas on see hüpotenuusi keskpunkt, nürinurkses kolmnurgas asub väljaspool kolmnurka.

Kolmnurga siseringjoon

Kolmnurga siseringjoone keskpunkt on nurgapoolitajate lõikepunkt.



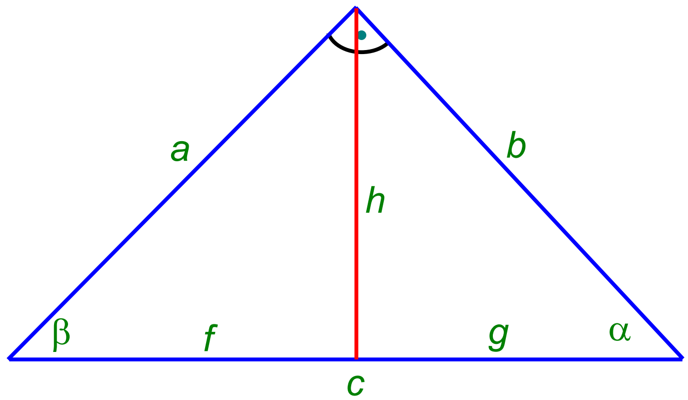
Sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje osadeks, mis on võrdelised nurga lähisküIgedega:

$$BD : DC = AB : AC$$

Nurga poolitaja jaotab pindala võrdeliselt lähisküIgedega:

$$S_{ABD} : S_{ADC} = AB : AC$$

23. KOLMNURK



* Pythagorase teoreem:
  $a^2 + b^2 = c^2$
* Eukleidese teoreem:
  $a^2 = f \cdot c$ ja $b^2 = g \cdot c$
* Teoreem kõrgusest:
  $h^2 = f \cdot g$
* $a \cdot b = h \cdot c$, $S = 0{,}5ab$, $R = 0{,}5c$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta, \quad \frac{f}{a} = \cos\beta, \quad \frac{h}{f} = \tan\beta \quad \frac{h}{b} = \sin\alpha, \quad \frac{g}{b} = \cos\alpha \quad \frac{h}{g} = \tan\alpha$$

Siinus- ja koosinusteoreem. Pindala valemid

Siinusteoreem: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Koosinusteoreem:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

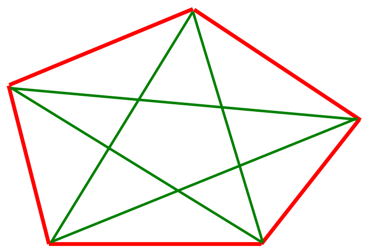
Pindala valemid

$S = 0{,}5ah$ $\quad S = 0{,}5ab\sin\gamma$ $\quad S = pr$ $\quad S = \dfrac{abc}{4R}$

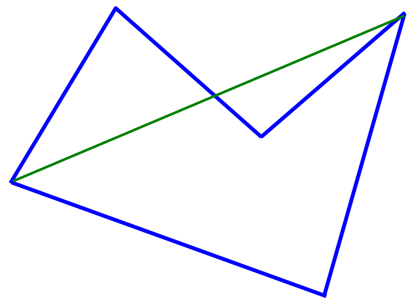
$S = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heroni valem)

Võrdkülgse kolmnurga pindala $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

24. HULKNURK



Kumer hulknurk

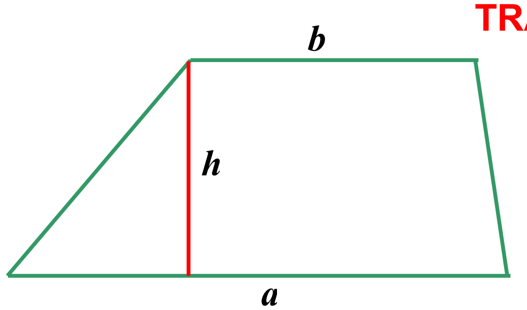


Mittekumer hulknurk

Kumera hulknurga sisenurkade summa on $S_n = (n - 2)180^\circ$.

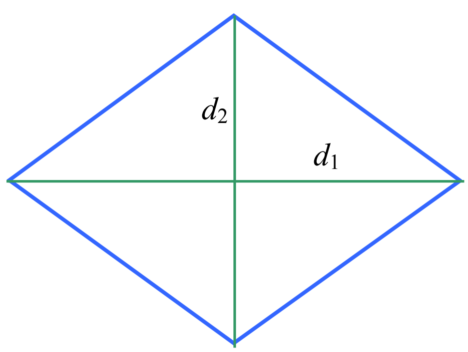
Diagonaalide arv $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

TRAPETS



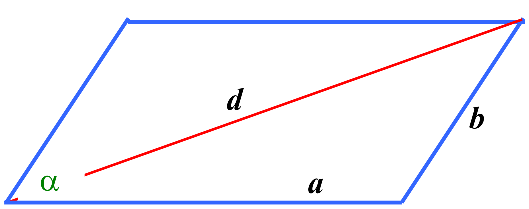
$$S = \frac{a+b}{2}h$$

ROMB



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

RÖÖPKÜLIK



$$S = ab \sin \alpha$$

25. STATISTIKA PÕHIMÕISTED

Üldkogum - objektide (nähtuste) hulk, mille kohta tahetakse teha järeldusi

Valim - mõõtmiseks võetud osa üldkogumist

VALIM

JUHUSLIK

PLANEERITUD

VALIM

- ARVUKAS
- VALIMISSE SATTUMINE ON VÕRDTÕENÄONE KÕIGILE ÜLDKOGUMI OBJEKTIDELE

TUNNUSED

ARVTUNNUSED

MITTEARVTUNNUS

PIDEV

Väärtused võivad olla reaalarvud mingist piirkonnast, näiteks kasv, kaal, aeg

DISKREETNE

Üksteisest eraldatud väärtused: vanus täisaastates, pereliikmete arv, õpilaste arv klassis

JÄRJESTUS-TUNNUS

Väärtusi saab sisu põhjal järjestada: Meeldib väga, meeldib, ükskõikne, talutav, ei kõlba kuhugi

NOMINAAL-TUNNUS

Väärtusi pole mõtet järjestada, rahvus, elukutse, parteilisus

Binaarsed tunnused - kaks teineteist välistavat väärtust: sugu, elus-eluta

26. MÕNINGAID STATISTIKAS KASUTATAVAID MÕISTEID

Variatsioonirida – katse korduval sooritamisel saadud tulemuste esitamine mittekahaneva või mittekasvava järjendina.

Näide: hinnete 4, 4, 5, 2, 1, 2, 4, 5, 5, 3 variatsioonirida on
1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5 või vastupidi 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 1.

Sagedustabel – tabel, kuhu iga võimaliku sündmuse jaoks on toodud tema esinemiste arv vaadeldavates katsetes.

Hinnete sagedustabel oleks selline

Hinne	5	4	3	2	1
Arv	3	3	1	1	1

Aritmeetiline keskmine – antud arvude summa jagatis nende koguarvuga.

Hinnete aritmeetiline keskmine on $(5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1) : 9 \approx 3{,}67$

Mood – variatsioonireas kõige sagedamini esinev suurus

Variatsioonirea 1, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7 puhul on mood $M_o = 4$

Võib olla ka kaks moodi, näiteks variatsioonireas 3, 5, 5, 6, 6, 7 on $M_o = 5$ kui ka $M_o = 6$

Mediaan – variatsioonirea keskmine element

Variatsioonireas 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9 on mediaaniks $M_e = 7$

NB! Kui variatsioonireas on paarisarv elemente, siis loetakse mediaaniks arv järjekorranumbriga $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, kus nurksulud tähendavad arvu täisosa.
Variatsioonirea 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6 mediaan $M_e = 4$

Hälve – juhusliku suuruse *x* ja selle suuruse keskväärtuse (aritmeetilise keskmise) *a* vahe, s.t. $x - a$

Dispersioon – hälvete ruutude keskväärtus

Standardhälve – ruutjuur dispersioonist

27. STATISTILISED FUNKTSIOONID Excelis

Funktsioon	Funktsioon Excelis	Näide
Aritmeetiline keskmine	AVERAGE	AVERAGE(A1:B100)
Geomeetriline keskmine	GEOMEAN	GEOMEAN(A1:B100)
Harmooniline keskmine	HARMEAN	HARMEAN(A1:B100)
Valimi maht	COUNT	COUNT(A1:B100)
Maksimaalne element	MAX	MAX(A1:B100)
Minimaalne element	MIN	MIN(A1:B100)
Mediaan	MEDIAN	MED(A1:A100)
Mood	MODE	MODE(A1:A100)
Dispersioon	VAR	VAR(A1:A100)
Standardhälve	STDEV, STDEVP	STDEV(A1:A100) STDEVP(A1:A100)
Lineaarne korrelatsiooni- Kordaja	CORREL	CORREL(PLOKK1;PLOKK2)
Regressioonisirge tõus	SLOPE	SLOPE(PLOKK1;PLOKK2)
Regr.sirge vabaliige	INTERCEPT	INTERCEPT(PL1;PL2)

Kell 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 ja 20 tänaval jalutanud 7 inimese pikkused

167	169	178	145	165	144	177	168	176
178	189	149	189	145	165	178	173	128
176	190	148	177	189	129	134	145	156
178	188	146	169	156	127	174	178	144
165	167	144	200	177	168	128	154	190
166	168	178	178	179	178	189	178	206
167	159	155	149	149	148	123	155	167
12	13	14	15	16	17	18	19	20

Keskväärtus 164,6	Mood 178
Geomeetriline keskmine 163,5	Dispersioon 363,6
Harmooniline keskmine 162,3	Standardhälve I 19,1
Valimi maht 63	Standardhälve II 18,9
Maksimaalne element 206	Korrelatsioonikordaja 1,2 0,94
Minimaalne element 123	Regressioonisirge tõus 0,493
Mediaan 167	Regr. sirge vabaliige 93,9

28. PERMUTATSIOONID, VARIATSIOONID JA KOMBINATSIOONID

N-elemendilist hulka saab ümber järjestada $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ erineval viisil. Näiteks 20 õpilasega klassis saab lapsi erineval moel ritta panna 2432902008176640000 erineval viisil (vähemalt 2 last on vahetanud koha).

Kombinatsioonid *n*-elemendist *m*-kaupa $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

N: 10 elemendilisest hulgast saab moodustada 4-elemendilisi osahulki

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 210.$$

NB! Siin pole elementide järjekord hulgas oluline.

Variatsioonid *n*-elemendist *m* kaupa $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Moodustatakse osahulgad, kus oluline on ka elementide järjestus, näiteks {Jüri; Mary} ≠ {Mary; Jüri}.

N: 6 võistlejast saab moodustada 4-liikmelisi teatemeeskondi (arvestades nüüd etappide läbimise järjekorda)

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2} = 360.$$

Kui etappide läbimise järjekord pole oluline, siis selliseid võistkondi on

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15.$$

Firma kuulutab konkursi 3 vakantsele katlaoperaatori kohale. Kohale tuli 20 soovijat.

Erinevaid võimalusi töölevõtmiseks on nüüd $C_{20}^3 = C_{20}^{17} = \dfrac{20!}{17!\cdot 3!} = \dfrac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$

Firma võtab tööle asjaajaja, koristaja ja müügimehe. Konkursile saabus 20 soovijat. Erinevaid võimalusi ametikohtade jaotuseks on nüüd

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 18\cdot 19\cdot 20 = 6840.$$

29. KLASSIKALINE TÕENÄOSUS

Tõenäosus $p = \dfrac{\text{soodsate võimaluste arv}}{\text{kõikide võimaluste arv}}$. Seega $0 \le p \le 1$.

Veeretatakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus, et ühel täringul saadud silmade arv jagub teisel täringul saadud silmade arvuga ?

Märgime täringuviskel saadavad tulemused tabelisse (J-jagub),

S/P	1	2	3	4	5	6
1	J	J	J	J	J	J
2	J	J	-----	J	-----	J
3	J	-----	J	-----	-----	J
4	J	J	-----	J	-----	-----
5	J	-----	-----	-----	J	-----
6	J	J	J	-----	-----	J

Näeme, et soodsaid võimalusi on 22, kokku kõiki võimalusi on aga 36,seega

$p = \dfrac{22}{36} = \dfrac{11}{18} = 0{,}611.$

Heidetakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus, et silmade korrutis pole suurem 12-st või on 20-st suurem ?

Teeme jällegi tabeli. Mittesobivad võimalused on märgitud musta värviga.

1/2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Mittesobivaid võimalusi on kokku 7, sobivaid seega 36 – 7 = 29.

Vastus: tõenäosus on $\dfrac{29}{36} = 0{,}8056.$

30. SÜNDMUSTE KORRUTIS JA SUMMA. TÕENÄOSUSTE LIITMISE LAUSE

Sündmust, mille korral toimub sündmus A **kui ka** sündmus B, nimetatakse sündmuste A ja B korrutiseks.

Näide: olgu sündmus A täringuviskel vähemalt 3 silma saamine ja sündmuseks B paarisarvuline tulemus, siis mõlemat tingimust rahuldavad vaid 4 ja 6 silma. Tõenäosus, et mõlemad sündmused leiavad aset on $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Sündmust, mille korral toimub sündmus A **või** sündmus B, nimetatakse sündmuste A ja B summaks.

Näide: olgu sündmus A, et Juku saab eksamil hindeks 5 ja sündmuseks B, et ta saab hinde 1. Tõenäosus, et vähemalt üks nendest sündmustest leiab aset on $p = \frac{2}{5}$.

Kahte sündmust, mis ei saa esineda üheaegselt, nimetatakse **teineteist välistavateks** sündmusteks.

Näide: kaardipakist ühe kaardi võtmisel ei saa see üheaegselt olla punane kaart ja must kaart.

Tõenäosuste liitmise lause

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, ehk sõnades

kahe sündmuse summa tõenäosus võrdub nende sündmuste tõenäosuste summaga, millest on lahutatud samade sündmuste korrutise tõenäosus.

Näide: olgu sündmuseks A ruutumasti kaardi tulek ning sündmuseks B pildikaardi tulek, siis $P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{12}{52}$ ning $P(AB) = \frac{3}{52}$,

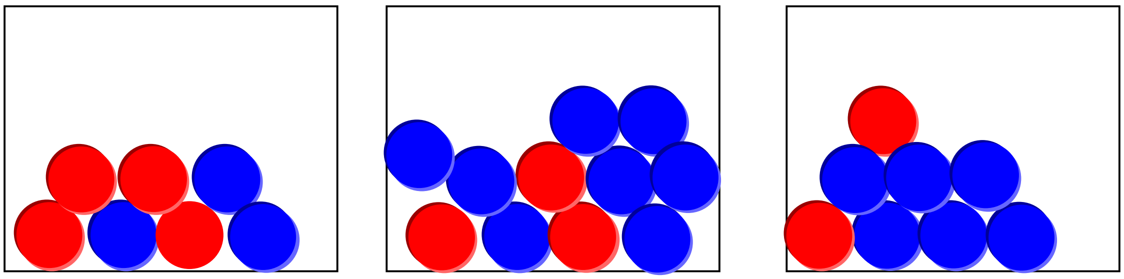
seega $P(A+B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52}$.

Kui sündmused A ja B on üksteist välistavad, siis

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

31. TÄISTÕENÄOSUS

On antud 3 urni. Neist ühes on 4 punast ja 3 sinist kuuli, teises 3 punast ja 8 sinist kuuli ja kolmandas 2 punast ja 6 sinist kuuli. Kui suur on tõenäosus, et kuul võeti teisest urnist ja see on punane; suvalisest urnist huupi võetud kuul on sinine ?



1. urn **2. urn** **3. urn**

1. pool ülesandest.

Kui urn valitakse juhuslikult, siis $p(U_2) = \frac{1}{3}$.

2. urnis on 3 punast ja 8 sinist kuuli. Punase võtmise tõenäosus on $p(P) = \frac{3}{11}$.

Et kuul võetakse 2. urnist ja see on punane

$p\,(U_2 \cap P) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$.

2. pool ülesandest.

Hüpoteesid:

A - võetakse sinine kuul

H_1 - võetakse 1. urnist

H_2 - võetakse 2. urnist

H_3 - võetakse 3. urnist

$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup (A \cap H_3)$

$p(A \cap H_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

$p(A \cap H_2) = \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{33}$

$p(A \cap H_3) = \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$p(A) = \frac{1}{7} + \frac{8}{33} + \frac{1}{4} = \frac{587}{924} = 0{,}64$.

32. BERNOULLI VALEM

Vaatleme sündmust, mille esinemise tõenäosus on kogu aeg ühesugune. Olgu see p. Selle sündmuse mittetoimumise tõenäosus on $q = 1 - p$.

Bernoulli valem: $P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Tõenäosus, et madu-uss nõelab metsas jalutavat marjulist on 0,005. Kui suur on tõenäosus, et 100 korda metsas käinut pole kordagi nõelatud; on nõelatud 2 korda; nõelati iga kord ?

1. $P_{100,0} = C_{100}^0 \cdot 0{,}995^{100} \cdot 0{,}005^0 = 0{,}606$

2. $P_{100,2} = C_{100}^2 \cdot 0{,}995^{98} \cdot 0{,}005^2 = 0{,}076$

3. $P_{100,100} = C_{100}^{100} \cdot 0{,}995^0 \cdot 0{,}005^{100} = 7{,}9 \cdot 10^{-231}$

Kui sündmuse toimumise tõenäosus on igal katsel p, siis tõenäoseim sündmuse esinemiste arv n katse korral rahuldab võrratust

$$\boxed{np - q \le n^* \le np + p}$$ Valem !

Jussike hilineb igasse matemaatika tundi tõenäosusega 0,15. Leiame tõenäoseima hilinemiste arvu õppeaasta jooksul (matemaatikat on 4 tundi nädalas).

Õppeaastas on 35 õppenädalat, seega tunde $n = 140$.
$140 \cdot 0{,}15 - 0{,}85 \le n^* \le 140 \cdot 0{,}15 + 0{,}15$
$21 - 0{,}85 \le n^* \le 21 + 0{,}15$
Tõenäoseim hilinemiste arv on 21.

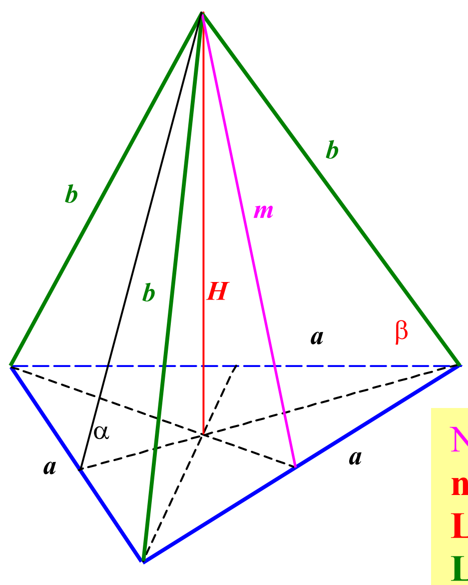
Igasse füüsika tundi hilineb Jussike tõenäosusega 0,33. Mitu füüsika tundi peab olema toimunud, et Jussike suudaks 21 korda hiljaks jääda ?

Otsitav tundide arv on siin n, $p = 0{,}33$, $q = 0{,}67$ ja $n^* = 21$.
Asendades teadaolevad suurused valemisse saame võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0{,}33n - 0{,}67 \le 21 \\ 0{,}33n + 0{,}33 \le 21 \end{cases}$$

mille lahendamisel saame, et vähim n väärtus on 63.

33. KOLMNURKNE PÜRAMIID



a – põhiserv
b – külgserv
m – külgtahu apoteem
H – püramiidi kõrgus
α - nurk külgtahu ja põhja vahel
β - nurk külgserva ja põhiserva vahel

N1. **Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on 3 cm ning külgpindala on kaks korda suurem põhja pindalast. Leida püramiidi ruumala.**

Lahendus:

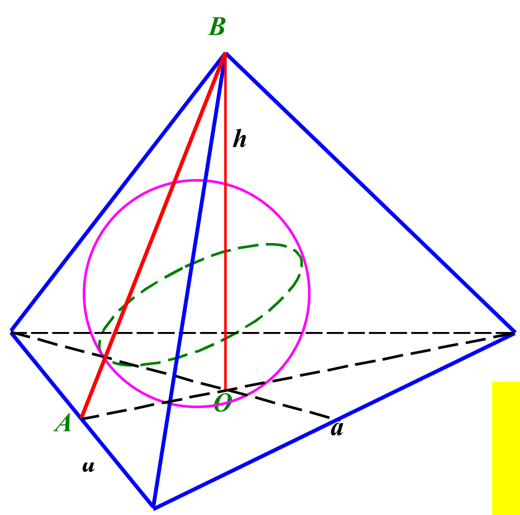
$S_k = 1{,}5am$ ja $V = \frac{1}{3} S_p H = \frac{a^2\sqrt{3}H}{12}$.

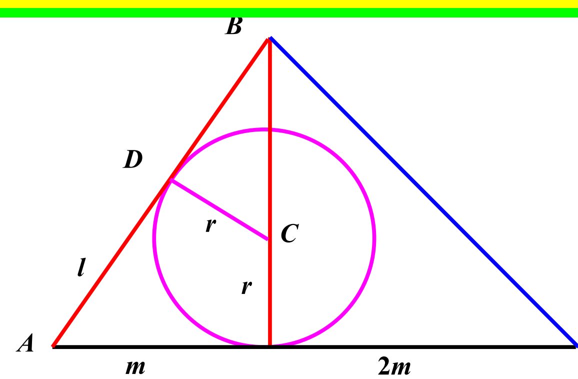
Põhja kõrgus $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Et $S_k = 2V$, siis $1{,}5am = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ehk

$m = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Avaldame h ja m abil suuruse H.

$H = 0{,}5a$ ja seega $V = \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

N2. **Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja kõik külgtahud moodustavad põhjaga nurga 45°. Leida püramiidi sisse kujundatud kera ruumala.**

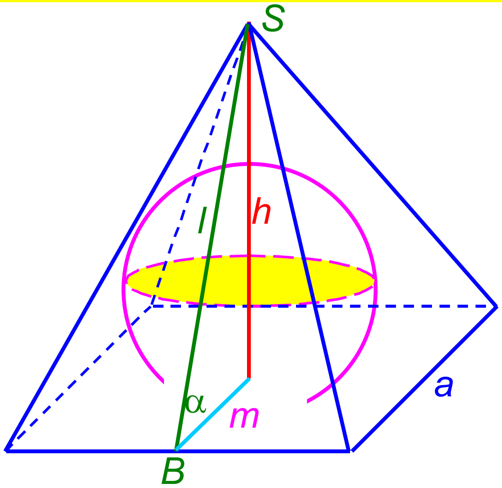


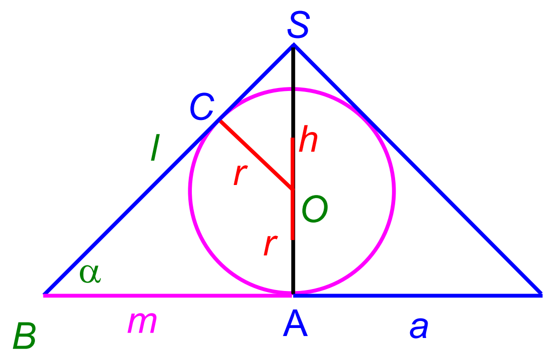


$l = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ $r = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6}$ $V = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6}\right]^3$

34. NELINURKNE PÜRAMIID

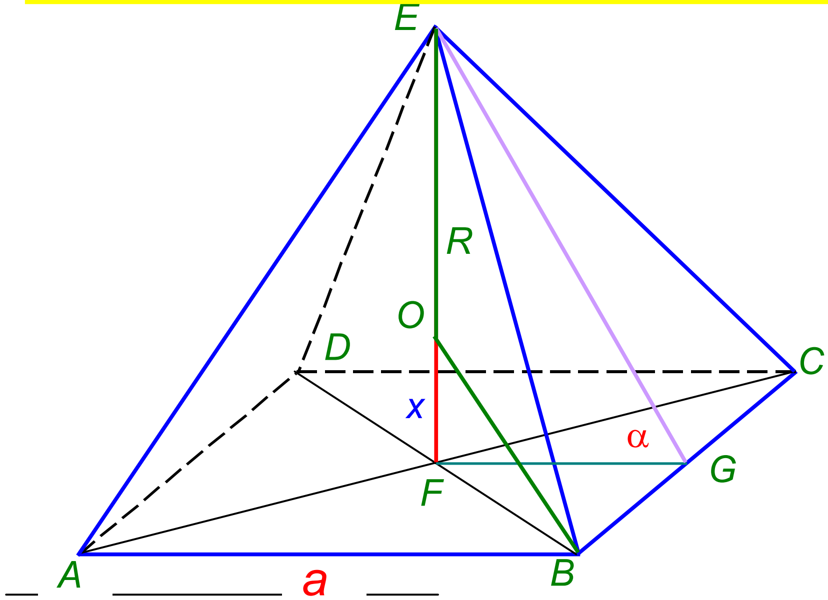
N1. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 6 ja külgtahk moodustab põhitahuga nurga 30º. Leida täispindala, ruumala ja püramiidi sisse kujundatud kera pindala.





Kontrolli, kas
$l = 12$, $m = 6\sqrt{3}$, $S_p = 432$, $S_k = 288\sqrt{3}$, $S_t = 144(2\sqrt{3} + 3)$, $V = 864$.
Kuna $BA = BC$, siis BO poolitab nurga α. Siit $r : m = \tan 15º$, millest $r = 2{,}78$
$S_{kera} = 4\pi r^2 = 97{,}44$.

N2. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a. Külgtahu ja põhja vahel on nurk α. Leida püramiidi ümber kujundatud kera raadius.

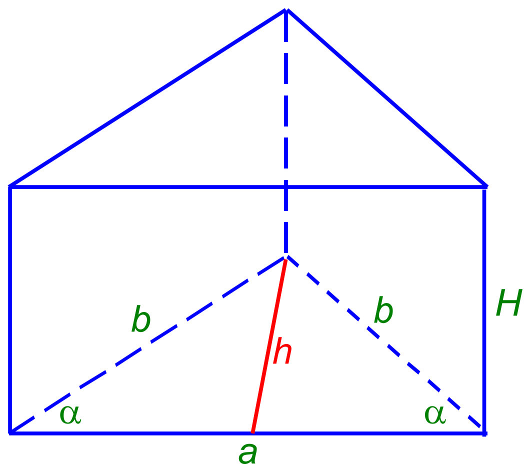


Kera raadius on R. Kolmnurk EFG on täisnurkne, $FG=0{,}5a$.
$FE = FO + OE = 0{,}5\,a\tan\alpha$.
Kui $FO = x$, siis
$x = 0{,}5a\tan\alpha - R$,
$x^2 = 0{,}25a^2\tan^2\alpha - aR\tan\alpha + R^2$
Kolmnurk OFB on täisnurkne,
$x^2 = R^2 - 0{,}5a^2$.
$0{,}25a^2\tan^2\alpha - aR\tan\alpha = -0{,}5a^2$

$$R = \frac{a\,(\tan^2\alpha + 2)}{4\tan\alpha}$$

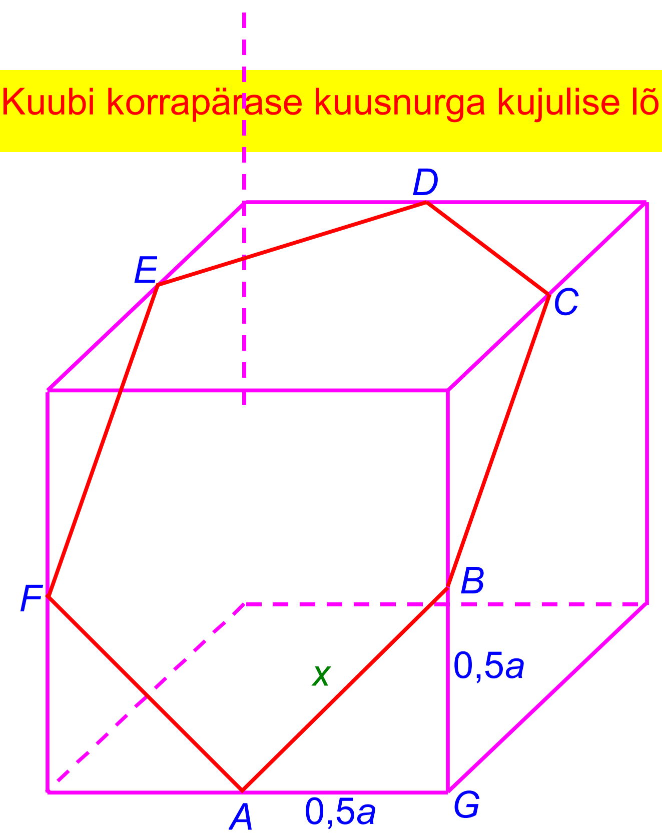
35. PRISMA

Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alus on a ja alusnurk on α. Leida prisma ruumala, kui tema külgpindala on võrdne aluste pindalade summaga.



Ruumala $V = S_pH$. Põhja pindala on
$S_p = 0{,}5ah = 0{,}5a \cdot 0{,}5a\tan\alpha = 0{,}25a^2\tan\alpha$.
Külgpindala $S_k = aH + 2bH = Ha(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha})$.
Et $S_k = 2S_p$, siis
$Ha(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}) = 0{,}5a^2 \tan\alpha$, millest
$H = 0{,}5a \tan 0{,}5\alpha$.
Prisma ruumala $V = \dfrac{a^3 \tan\alpha \tan 0.5\alpha}{8}$

Kuubi korrapärase kuusnurga kujulise lõike pindala on Q. Leida kuubi täispindala.



Olgu kuubi serva pikkus a, siis täispindala on $S_t = 6a^2$.

Olgu kuusnurga külg x, siis kuusnurga pindala on

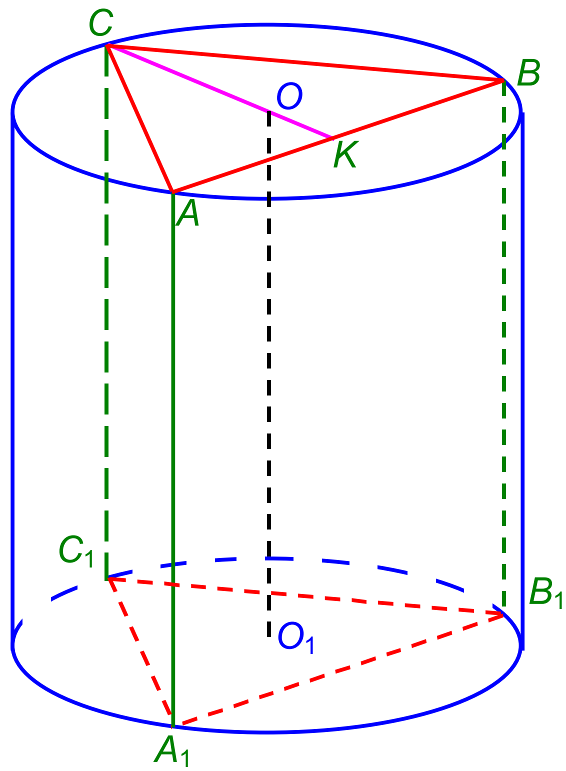
$Q = S_{kuusnurk} = 6\cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 1{,}5\sqrt{3}\, x^2$.

Järelikult $x^2 = \dfrac{2Q\sqrt{3}}{9}$.

Kolmnurgast AGB saame, et
$a^2 = 2x^2$.
Täispindala
$S = 6\cdot 2x^2 = 12 \cdot \dfrac{2Q\sqrt{3}}{9} = \dfrac{8Q\sqrt{3}}{3}$.

36. SILINDER JA KOONUS

Silindrisse on kujundatud korrapärane kolmnurkne püstprisma $ABC \ldots C_1$ põhiservaga a ja kõrgusega $\frac{3a}{\pi}$. Leida silindri ruumala.



Võrdkülgse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub kõrguste lõikepunktis ja kõrgus jaotub osadeks 2 : 1 alates kolmnurga tipust.

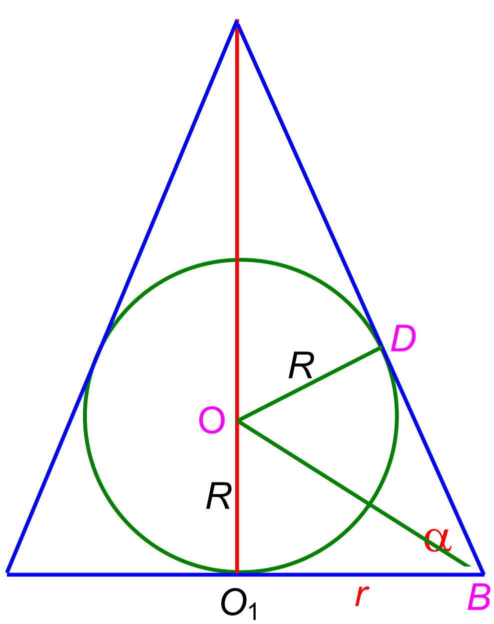
Kolmnurgast BKC leiame, et

$CK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$r = CO = \frac{2}{3}\,CK = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

$V = \pi r^2 H = \pi\,(\frac{a}{3}\sqrt{3}\,)^2\,\frac{3a}{\pi} = a^3$.

Koonuse täispindala on kolm korda suurem koonuse sisse kujundatud kera pind-Alast. Leiame nurga koonuse moodustaja ja põhja vahel.



Ülesande tingimuste kohaselt
$\pi r\,(r + m) = 3{\cdot}4\pi R^2$.
Kolmnurgad OO_1B ja ODB on võrdsed, seega OB poolitab nurga α.
Avaldame R ja m:

$R = r\tan 0{,}5\alpha$ ja $m = \frac{r}{\cos\alpha}$. Asendame need pindalade valemitesse, saame

$\pi r\,(r + \frac{r}{\cos\alpha}\,) = 12\pi r^2 \tan^2 0{,}5\alpha$,

millest saame peale lihtsustamist ruutvõrrandi $\cos\alpha$ suhtes:
$13\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 1 = 0$, millest

$\alpha_1 = \arccos\frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}$ ja $\alpha_2 = \arccos\frac{5 - 2\sqrt{3}}{13}$

37. VÕRRATUSED

Lineaarvõrratus on võrratus kujul $ax > b$ või $ax < b$.

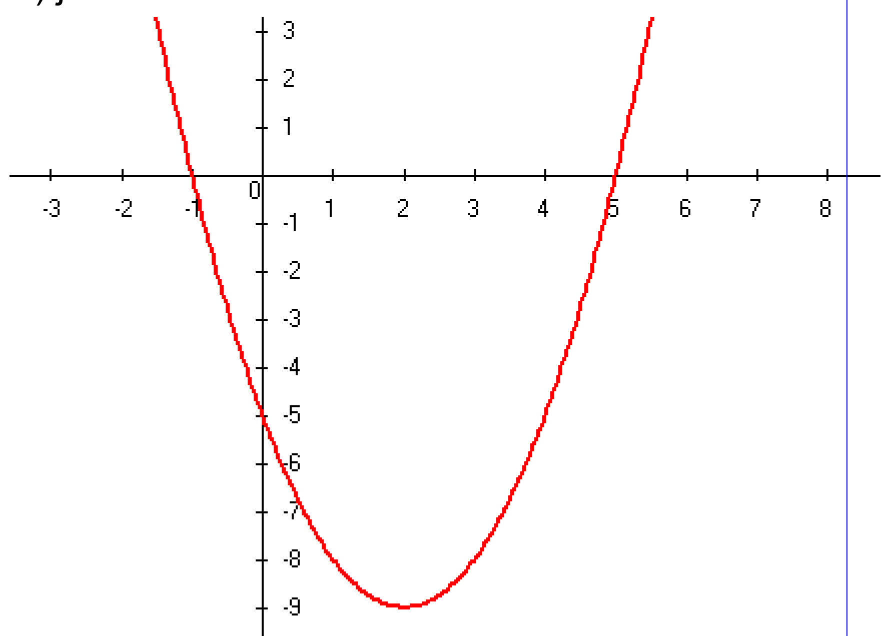
Võrratuse $3x > 7$ lahendihulk on lõpmatu vahemik $\left]\frac{7}{3};\infty\right[$

Võrratuse $-3x > 7$ mõlema poole jagamisel arvuga (–3) muutub võrratuse märk vastupidiseks, s.t. $x < -\frac{7}{3}$ ning lahendihulk on $\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right[$.

Ruutvõrratus on võrratus kujul $ax^2 + bx + c > 0$ või $ax^2 + bx + c < 0$
Ruutvõrratuse lahendamiseks lahendatakse kõigepealt vastav ruutvõrrand ja seejärel saab kõige lihtsamalt joonise abil leida vajaliku lahendihulga.

Näide. Lahendame võrratuse $x^2 - 4x - 5 < 0$.
Võrrandi $x^2 - 4x - 5 = 0$ lahendid on (–1) ja 5.
Kuna parabool avaneb ülespoole, siis pole lahendihulga leidmine raske:

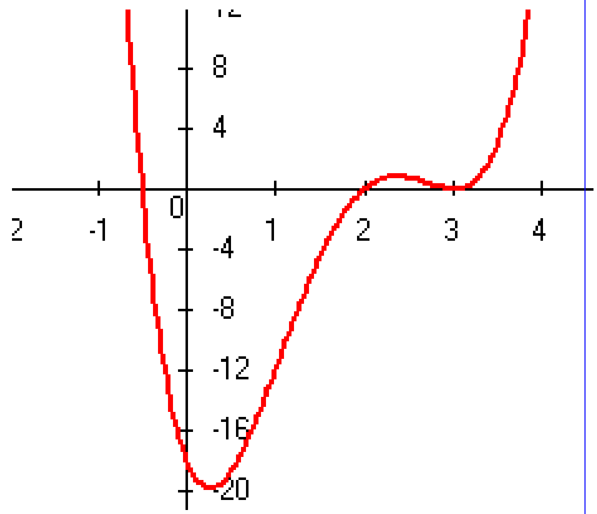
L = $]-1;5[$.



Murdvõrratus on võrratus, kus tundmatu esineb ka murru nimetajas.

Murdvõrratused kujul $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ või $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$, kus $q(x) \neq 0$ asendatakse samaväärse võrratusega $p(x)q(x) > 0$ ($p(x)q(x) < 0$) ja lahendatakse intervallide meetodiga.

Näide. Lahendame võrratuse $(x-2)(2x+1)(3-x)^2 < 0$ intervallide meetodiga.

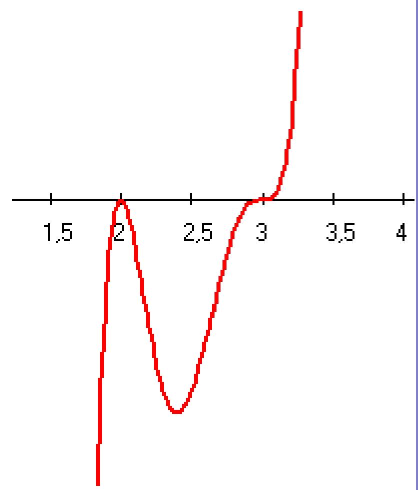


Vasakul olevad tegurid on võrdsed nulliga, kui $x = 2$, $x = -0,5$ ja $x = 3$, kusjuures $x = 3$ on kahekordne lahend ja joone tõmbamisel me sellest punktist läbi ei lähe, vaid pöördume tagasi. Teeme ligikaudse joonise.

Jooniselt on näha, et otsitav lahendihulk on
$L =]-0,5; 2[$.

Kontrollimiseks! Määra võrratuse vasaku poole märk, kui $x = -2$; $x = 1$; $x = 2,5$ ja $x = 4$.

Näide. Lahendame võrratuse $(x-3)^3(2-x)^2 \geq 0$
Vasak pool muutub nulliks, kui $x = 3$ (kolmekordne lahend), $x = 2$ (kahekordne lahend).
Paarituarvulise kordsusega lahendi korral läbib joon x-telge.
Teeme joonise.
Kuna on lubatud ka võrdumine nulliga, siis
$L = \{2\} \cup [3; \infty[$.



38. RUUTVÕRRANDID JA BIRUUTVÕRRANDID

Taandamata ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalem on

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendivalem on

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ruutvõrrandil on 2 erinevat reaalarvulist lahendit, kui diskriminant $D > 0$,
2 võrdset lahendit, kui diskriminant $D = 0$,
reaalarvulised lahendid puuduvad kui diskriminant $D < 0$.

Biruutvõrrand on võrrand kujul $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
Lahendatakse asendusvõttega: $x^2 = t$, $at^2 + bt + c = 0$.

Lahendame võrrandi $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Peale asendust $x^2 = t$ saame võrrandi $t^2 - 13t + 36 = 0$.

$$t_{1;2} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36} = 6{,}5 \pm 2{,}5.$$

Järelikult $t_1 = 9$ ja $t_2 = 4$.
Arvestades asendust $x^2 = t$ saame
$x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$ ja $x_4 = -2$.

39. JUURVÕRRANDID

Kõiki juurvõrrandi lahendeid tuleb alati kontrollida, sest lahendamise käigus võivad tekkida võõrlahendid. Samas tuleb veenduda, et lahendamise käigus lahendeid kaotsi ei läheks.

Lahendame võrrandi $\sqrt{9+x\sqrt{8x^2+9}}=x+3$.
Mõnikord leitakse enne võrrandi lahendamist võrrandi määramispiirkond.
Tõstame mõlemad võrrandi pooled ruutu, siis saame

$$9+x\sqrt{8x^2+9}=x^2+6x+9,$$

$$x\sqrt{8x^2+9}=x^2+6x.$$

Kas võrduse mõlemat poolt võib nüüd jagada x-ga ?

Ei või, sest sel juhul läheb üks lahend $x = 0$ kaotsi !

$x\left[\sqrt{8x^2+9}-(x+6)\right]=0$, millest järeldub, et üks lahend võib olla $x=0$.

Lahendame nüüd võrrandi

$$\sqrt{8x^2+9}=x+6,$$

$$8x^2+9=x^2+12x+36,$$

$$7x^2-12x-27=0.$$

Ruutvõrrandi lahendid on 3 ja $-\frac{9}{7}$. Kontrolli,et kõik leitud lahendid sobivad.

Vastus: $x = 0$, $x = 3$, $x = -\frac{9}{7}$.