

Funktsioonid I

Funktsiooni tuletis

Tuletiste tabel:

$$\begin{array}{lll} c' = 0 & x' = 1 & \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & (x^n)' = nx^{n-1} & (e^x)' = e^x \\ (a^x)' = a^x \cdot \ln a & (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \\ (\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletise valemid:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$$

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x)$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Edasi vaatame ülesandeid.

1. Leia funktsiooni $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ tuletis.

Lahendus:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3)' + (4x^2)' - (5x)' + 8' = 2 \cdot (x^3)' + 4 \cdot (x^2)' - 5 \cdot x' + 8' \\ &= 2 \cdot 2x^2 + 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 8x - 5 \end{aligned}$$

2. Leia funktsiooni $y = 2x^5 + 7x^4 - 4x^3 + 10x - 21$ tuletis.

Lahendus:

$$y' = (2x^5)' + (7x^4)' - (4x^3)' + (10x) - 21' = 10x^4 + 28x^3 - 12x^2 + 10.$$

3. Leia funktsiooni $y = \frac{1}{x^5}$ tuletis.

Lahendus:

$$y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

4. Leia funktsiooni $y = \frac{7}{x^3}$ tuletis.

Lahendus:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{7}{x^3}\right)' = (7x^{-3})' = 7(x^{-3})' = 7 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} = \\ &= -21x^{-4} = -\frac{21}{x^4}. \end{aligned}$$

5. Leia funktsiooni $s = 5t^2 - 4\sqrt{t} + \frac{3}{t}$ tuletis.

Lahendus:

$$\begin{aligned} s' &= (5t^2)' - (4\sqrt{t})' + \left(\frac{3}{t}\right)' = 5 \cdot (t^2)' - 4 \cdot (\sqrt{t})' + 3 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' = \\ &= 5 \cdot 2t - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 10t - \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3}{t^2} \end{aligned}$$

6. Leia funktsiooni $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ tuletis kohal $x = 0,01$.

Lahendus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 4\sqrt{x})' = x' - \left(4x^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \\ &= 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}; \\ f'(0,01) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = 1 - \frac{2}{0,1} = 1 - 20 = -19. \end{aligned}$$

7. On antud funktsioon $f(x) = \frac{6x^2}{5\sqrt[3]{x}}$. Leia $f'(27)$.

Lahendus:

Teisendame antud funktsiooni järgmiselt:

$$f(x) = \frac{6x^2}{5\sqrt[3]{x}} = \frac{6}{5}x^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6}{5}x^{2-\frac{1}{3}} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}$$

Leiame nüüd tuletise

$$f'(x) = \left(\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} \right)' = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = 2x^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{x^2}$$

ning nüüd tuletise väärtuse kohal 27. Saame

$$f'(27) = 2\sqrt[3]{27^2} = 2 \cdot 9 = 18.$$

Vastus: $f'(27) = 18$

8. Leia funktsiooni $y = (x^2 - 1)(3x + 2)$ tuletis.

Lahendus:

1) Kasutame korrutise tuletise leidmise valemit. Saame

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2 - 1)(3x + 2)]' = (x^2 - 1)(3x + 2)' + (3x + 2)(x^2 - 1)' = \\ &= (x^2 - 1) \cdot 3 + (3x + 2) \cdot 2x = 3x^2 - 3 + 6x^2 + 4x = \\ &= 9x^2 + 4x - 3. \end{aligned}$$

2) On olemas ka teine viis seda ülesannet lahendada: avame sulud ja diferentseerime seejärel saadud hulkliiget. Saame

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 1)(3x + 2) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \\ y' &= (3x^3 + 2x^2 - 3x - 2)' = 3 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 3 \cdot 1 = 9x^2 + 4x - 3. \end{aligned}$$

9. Leia funktsiooni $y = (x^2 + 1)(3x^3 - 2)$ tuletis.

Lahendus:

1) Kasutame korrutise tuletise leidmise valemit. Saame

$$\begin{aligned} y' &= [(x^2 + 1)(3x^3 - 2)]' = (x^2 + 1)(3x^3 - 2)' + (3x^3 - 2)(x^2 + 1)' = \\ &= (x^2 + 1) \cdot 3 \cdot 3x^2 + (3x + 2) \cdot 2x = 9x^4 + 9x^2 + 6x^4 - 4x = \\ &= 15x^4 + 9x^2 - 4x. \end{aligned}$$

2) On olemas ka teine viis seda ülesannet lahendada: avame sulud ja diferentseerime seejärel saadud hulkliiget. Saame

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + 1)(3x^3 - 2) = 3x^5 - 2x^2 + 3x^3 - 2 = 3x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 2 \\ y' &= (3x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 2)' = 3 \cdot 5x^{5-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} = \\ &= 15x^4 + 9x^2 - 4x. \end{aligned}$$

10. Leia funktsiooni $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{7x + 3}$ tuletis.

Lahendus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2x)'(7x + 3) - (3x^2 - 2x)(7x + 3)'}{(7x + 3)^2} = \\ &= \frac{(6x - 2)(7x + 3) - (3x^2 - 2x) \cdot 7}{(7x + 3)^2} = \\ &= \frac{42x^2 + 18x - 14x - 6 - 21x^2 + 14x}{(7x + 3)^2} = \\ &= \frac{21x^2 + 18x - 6}{(7x + 3)^2} = \frac{3(7x^2 + 6x - 2)}{(7x + 3)^2} \end{aligned}$$

11. Leia funktsiooni $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$ tuletis.

Lahendus:

Argumendiks on x , järelikut on a konstant ja tema ruut samuti, mistõttu $(a^2)' = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)' = \frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)' - (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)'}{(x^2 + a^2)^2} = \\ &= \frac{(x^2 + a^2) \cdot 2x - (x^2 - a^2) \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 2a^2x - 2x^3 + 2a^2x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{4a^2x}{(x^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$