

Võrrandid ja võrrandisüsteemid

Võrrandisüsteemide lahendamine

1. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 4y = 32 \end{cases}$$

Lahendus:

I. Avaldame ühest võrrandist ühe tundmtu teise kaudu (asendusvõte), näiteks avaldame esimesest võrrandist muutuja y muutuja x kaudu. Saame

$$3x - 2y = 6$$

$$-2y = 6 - 3x \quad | : (-2)$$

$$y = \frac{6 - 3x}{-2}$$

$$y = \frac{-(6 - 3x)}{2}$$

$$y = \frac{3x - 6}{2}$$

Me leiame ainult selle y väärtuse, mis on ühine mõlemale võrrandile ja seepärast asetame saadud y avaldise teise võrrandisse:

$$5x + 4 \cdot \frac{3x - 6}{2} = 32.$$

Saime ühe tundmatuga esimese astme võrrandi, mida lahendades saame:

$$5x + 4 \cdot \frac{3x - 6}{2} = 32$$

$$5x + 2(3x - 6) = 32;$$

$$5x + 6x - 12 = 32;$$

$$11x = 32 + 12$$

$$11x = 44 \quad | : 11;$$

$$x = 4$$

Saadud väärtuse asetame võrrandisse, kus on meil avaldatud y ja leiame väärtuse, mis vastab väärtusele $x = 4$:

$$y = \frac{6 - 3x}{-2}$$

$$y = \frac{3 \cdot 4 - 6}{2} = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = 3$$

II. Seda ülesannet saab edukalt lahendada ka teistmoodi. Kasutame liitmisvõtet. See võte seisneb selles, et mõlemas võrrandis teiseldatakse ühe ja sama tundmatu kordajad absoluutväärtuselt võrdseks, aga märgilt vastupidisteks. Seejärel liidetakse võrrandite vastavad pooled ning saadakse ühe tundmatuga võrrand. Meie korrutame võrrandisüsteemi esimest võrrandit arvuga 2 ning seejärel liidame teisele võrrandile.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \cdot 2 \\ 5x + 4y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ 5x + 4y = 32 \end{cases}$$

$$\hline 11x + 0 = 44$$

$$11x = 44 \mid + 11$$

$$x = 4$$

Kui liitmisvõttega on üks tundmatu leitud, siis teise tundmatu leiame esimese tundmatu asetamisega ühte antud võrrandeist. Selleks valime muidugi lihtsama võrrandi.

Meie valime esimese võrrandi

$$3x - 2y = 6$$

$$3 \cdot 4 - 2y = 6$$

$$12 - 2y = 6$$

$$-2y = 6 - 12$$

$$-2y = -6 \mid + (-2)$$

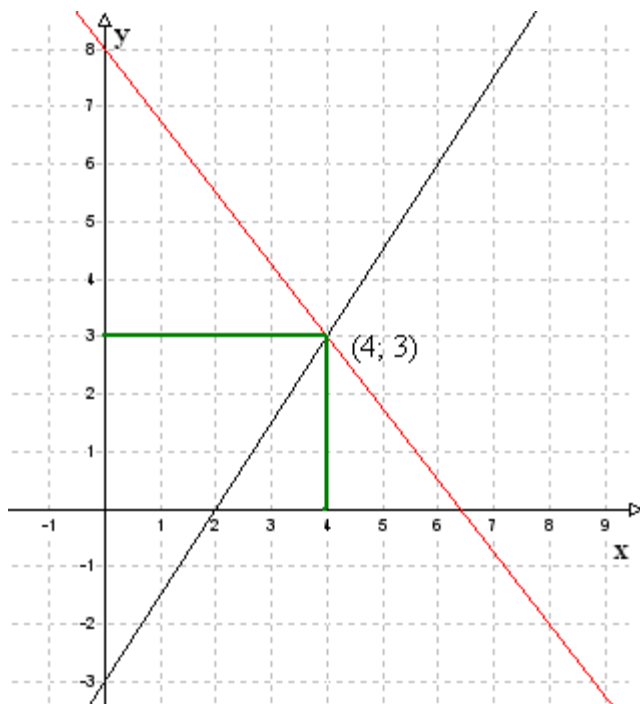
$$y = 3$$

III. Võime lahendada ka graafiliselt.

Selleks visandame kordinaatteljestikku mõlemad graafikud. Graafiku tegemiseks on vaja teha väärtuste tabel. Kuna tegu on esimese astme võrrandiga, mille graafikuks on sirge, siis piisab kahest punktist. Teeme selleks väiksed teisendused.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \Rightarrow -2y = 6 - 3x \Rightarrow y = -3 + \frac{3}{2}x \\ 5x + 4y = 32 \Rightarrow 4y = 32 - 5x \Rightarrow y = 8 - \frac{5}{4}x \end{cases}$$

Teeme graafiku.



Graafikul sirgete lõikepunkt $(4; 3)$ ongi võrrandisüsteemi lahendiks.

Kontroll:

Alati tehke kontroll!!! Selleks asendame võrrandisüsteemis olevad tundmatud nende arvuliste väärtustega ja vaatame, kas võrdused on tõesed.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 4y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6 \\ 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 20 + 12 = 32 \end{cases}$$

Vastus: Arvupaar $x = 4$ ja $y = 3$ on antud võrrandisüsteemi lahendiks.

2. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Lahendus:

I. Avaldame ühest võrrandist ühe tundmatu teise kaudu (asendusvõte), näiteks esimesest võrrandist muutuja y muutuja x kaudu.

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 4x - 2y = 9 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \\ \hline 6x + 0y = 12; \\ 6x = 12; \\ x = 2. \end{array}$$

Me leiame ainult selle y väärtuse, mis on ühine mõlemale võrrandile ja seepärast asetame saadud y avaldise teise võrrandisse:

$$2x + 3 \frac{5 - 2x}{3} = 8.$$

Saime ühe tundmatuga esimese astme võrrandi, mida lahendades saame:

$$2x + 3 \frac{5 - 2x}{3} = 8$$

$$2x + 5 - 2x = 8$$

$$0 = 8 - 5$$

$$0 \neq 3$$

Sellel võrrandisüsteemil lahendeid ei ole, kuna 3 ei saa mitte kunagi võrduda nulliga (reklaamid välja jättes ☺).

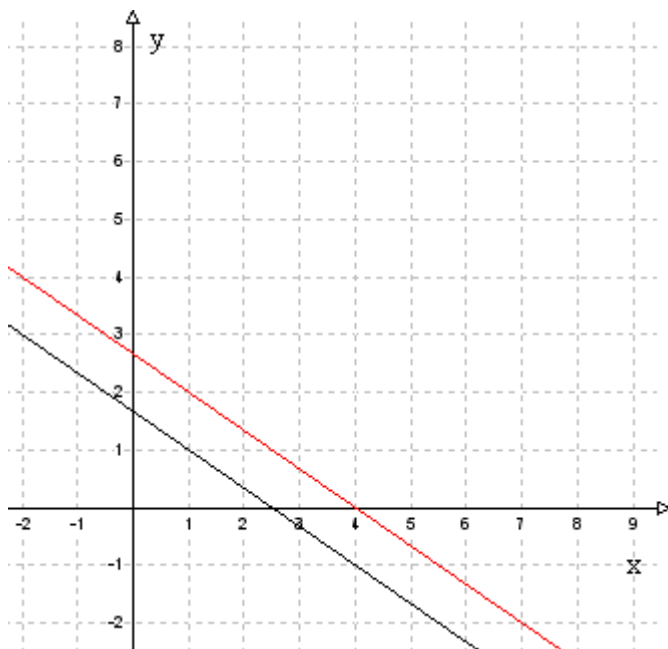
II. Seda ülesannet oleks saanud ka lihtsamalt lahendada. Kuna võrrandisüsteemi võrrandite vasakud pooled on võrdsed, kuid paremad pooled mitte, siis järelikult süsteemil puudub lahend.

III. Lahendame graafiliselt. Selleks visandame kordinaatteljestikku mõlemad graafikud. Graafiku tegemiseks on vaja teha väärtuste tabel. Kuna tegu on esimese astme võrrandiga, mille graafikuks on sirge, siis piisab kahest punktist.

Teeme selleks väiksed teisendused.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 5 - 2x \Rightarrow y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x \\ 2x + 3y = 8 \Rightarrow 3y = 8 - 2x \Rightarrow y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Teeme graafiku.



Must on esimene võrrand, punane teine. Nagu näha, on tegu paralleelsete sirgetega, millel puuduvad lõikepunktid.

Vastus: Sellel võrrandisüsteemil lahend puudub.

3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 4x - 3y = 13 \\ 8x - 6y = 26 \end{cases}$$

Lahendus:

Äärmiselt lihtne on kasutada siin liitmisvõtet.

See võtte seisneb selles, et mõlemas võrrandis teiseldatakse ühe ja sama tundmatu kordajad absoluutväärtuselt võrdseiks, aga märgilt vastupidisteks. Seejärel liidetakse võrrandite vastavad pooled ning saadakse ühe tundmatuga võrrand. Meie korrutame võrrandisüsteemi esimest võrrandit arvuga -2 ning seejärel liidame teisele võrrandile.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 13 \quad | \cdot (-2) \\ 8x - 6y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x + 6y = -26 \\ 8x - 6y = 26 \end{cases}$$

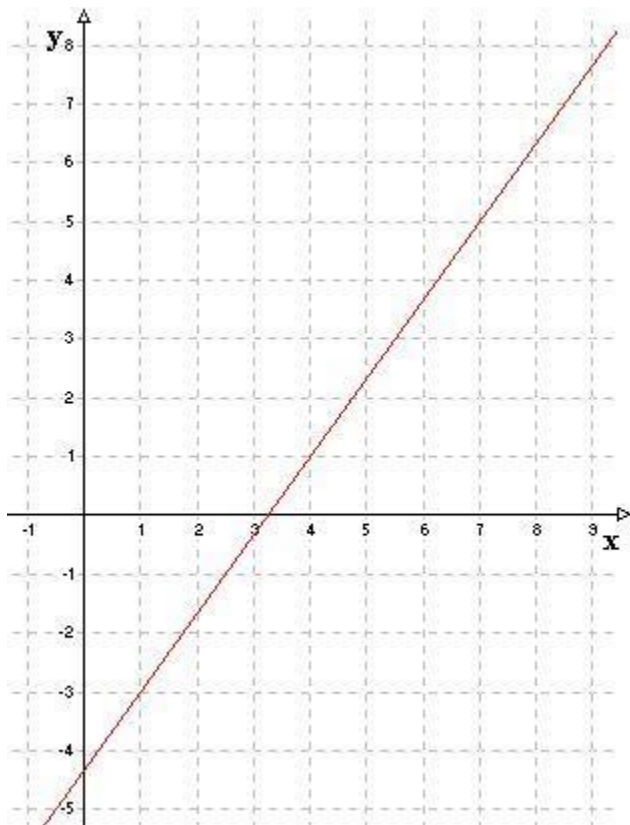
$$0 + 0 = 0$$

Sellisel juhul on lahendeid lõpmata palju. Mida see tähendab? Kui teeme nende kahe võrrandi järgi graafiku, siis etteruttavalt olgu öeldud, et mõlema võrrandi sirged ühtivad.

Teeme selleks väiksed teisendused.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 13 \Rightarrow -3y = 13 - 4x \Rightarrow y = -\frac{13}{3} + \frac{4}{3}x \\ 8x - 6y = 26 \Rightarrow -6y = 26 - 8x \Rightarrow y = \frac{26}{6} + \frac{8}{6}x = -\frac{13}{3} + \frac{4}{3}x \end{cases}$$

Ehk siis graafikul



Vastus: Sellel võrrandisüsteemil on lõpmatu hulk lahendeid.