Arvutamine murdudega

- ✓ Korrutamine: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- ✓ Jagamine: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
- ✓ Liitmine ja lahutamine: (ühise nimetaja leidmine) $\frac{a^{(d}}{b}+\frac{c^{(b}}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}$
- ✓ Taandamine: $\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$
- ✓ Segaarvud – liigmurrud: $a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$

- $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=\frac{2\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}\cdot 7}(saab\ taandada)=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 7}=\frac{4}{7}$
- $\frac{2}{3}:\frac{6}{7}=\frac{\cancel{2}\cdot 7}{3\cdot\cancel{6}_{3}}(saab\ taandada)=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}=\frac{7}{9}$
- $\frac{2}{3}+\frac{6}{7}=(\text{ü}hine\ nimetaja\ on\ 21)=\frac{2^{(7}}{3}+\frac{6^{(3}}{7}=\frac{17}{21}+\frac{18}{21}=\frac{35}{21}=(segaarv)=1\frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{21}_{3}}=(saab\ taandada)=1\frac{2}{3}$

Tehete järjekord

- ✓ Astendamine
- ✓ Korrutamine või jagamine
- ✓ Liitmine või lahutamine

- $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}5\right)$ $1)\ liitmine\ sulgudes\ \ 2)\ liitmine\ sulgudes\ \ 3)\ jagamine$
  1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=(\text{ü}hine\ nimetaja\ on\ 12)=\frac{1^{(4}}{3}+\frac{1^{(3}}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$
  2) $0{,}5=\frac{5}{10}=(saab\ taandada)=\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}_{2}}=\frac{1}{2}\ \ siis\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=$ $(\text{ü}hine\ nimetaja\ on\ 6)=\frac{1}{6}+\frac{1^{(3}}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=$ $\frac{4}{6}(saab\ taandada)=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}=\frac{2}{3}$
  3) $\frac{7}{12}:\frac{2}{3}=\frac{7\cdot\cancel{3}}{\cancel{12}_{4}\cdot 2}(saab\ taandada)=\frac{7}{8}$

- $25:5+3\cdot 4-(25-9):4$
  1) Jagamine: $25:5=5$
  2) Korrutamine: $3\cdot 4=12$
  3) Sulgudes: $25-9=16$
  4) Jagamine: $16:4=4$

5) Liitmine: 5+12=17
6) Lahutamine: 17-4=13

Absoluutväärtus

- ✓ $|a| \geq 0, kui\ a \geq 0, siis\ |a| = a\ ja\ kui\ a < 0, siis\ |a| = -a$

- ➢ $|7-3| - |2-5| = |4| - |-3| = 4 - 3 = 1$

Tehted astmetega

- ✓ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- ✓ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ✓ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- ✓ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- ✓ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- ✓ $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$
- ✓ $a^1 = a$
- ✓ $a^0 = 1$

- ➢ $5x^2y^3 \cdot (2x^3y^2)^3 = 5x^2y^3 \cdot 2^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 = 5x^2y^3 \cdot 8x^{3\cdot 3} \cdot y^{2\cdot 3} = 40x^2y^3x^9y^6 = 40x^{2+9}y^{3+6} = 40x^{11}y^9$

- ➢ $\frac{5a^2b}{3c^2d^3} \cdot \frac{9c^4d^3}{10ab^2} = \frac{\cancel{5}a^2b \cdot \cancel{9}^3c^4d^3}{\cancel{3}c^2d^3 \cdot \cancel{10}_2ab^2} (saab\ taandada) = \frac{3}{2}a^{2-1}b^{1-2}c^{4-2}d^{3-3} = \frac{3}{2}a^1b^{-1}c^2d^0 = \frac{3ac^2}{b}$

Korrutamise ja tegurdamise valemid

- ✓ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- ✓ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ✓ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ✓ $ax^2 + bx = x(ax + b)$
- ✓ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ➢ Lihtsustada: $(3+2a)(2a-3) + b(b-a) - (b-2a)^2 = (2a)^2 - 3^2 + b^2 - ab - (b^2 - 2 \cdot b \cdot 2a + (2a)^2 = \cancel{4a^2} - 9 + \cancel{b^2} - ab - \cancel{b^2} + 4ab - \cancel{4a^2} =$

$$3ab - 9 = 3(ab - 3)$$

- Lihtsustada: $\frac{a}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = (tegurdada\ nimetajad) = \frac{a}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} = (leida\ ühine\ nimetaja) = \frac{a}{a-b}^{(a+b} - \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2+ab-(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2+ab-a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab-b^2}{(a+b)(a-b)} = (tegurdada\ lugeja) = \frac{b\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \frac{b}{a+b}$

Võrrandite lahendamine

Lineaarvõrrand

- ✓ Lihtsustada
- ✓ Tuua kõik tundmatud liikmed vasakule (märgi muutus!!!)
- ✓ Leida tundmatu väärtus

- $5(y-2) - 9 = 21$

  Lihtsustada: $5y - 10 - 9 = 21$

  Tuua tundmatud liikmed vasakule: $5y = 21 + 10 + 9 \quad \rightarrow \quad 5y = 40$

  Leida tundmatu väärtus: $5y = 40\ |:5 \quad \rightarrow \quad y = 8$

- $\frac{x+4}{3} - 5 = \frac{2x-1}{2}$

  Lihtsustada: leida ühine nimetaja $\frac{x+4}{3}^{(2} - 5^{(6} = \frac{2x-1}{2}^{(3}\ |\cdot 6 \quad \rightarrow \ 2(x+4) - 5\cdot 6 = 3(2x-1)$

  $\rightarrow \ 2x + 8 - 30 = 6x - 3$

  Tuua tundmatud liikmed vasakule: $2x + 8 - 30 = 6x - 3 \rightarrow 2x - 6x = -3 - 8 + 30$

  $\rightarrow -4x = 19$

  Leida tundmatu väärtus: $-4x = 19|:(-4) \quad \rightarrow \quad x = -\frac{19}{4} = -4\frac{3}{4}$

Ruutvõrrand

- ✓ Lihtsustada
- ✓ Tuua kõik liikmed vasakule
- ✓ Kasutada valemit: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- ✓ Kui on mittetäielik ruutvõrrand:
  - Puudub vabaliige: $ax^2 + bx = 0$

    $\rightarrow \ x(ax+b) = 0$ lahendada kaks lineaarvõrrandit
  - Puudub lineaarliige: $ax^2 + c = 0$ $\rightarrow$ tuleb avaldada kõigepealt x^2 ja seejärel leida x väärtused

- $(x-8)(x+3)=1-5x$
  Lihtsustada: $(x-8)(x+3)=1-5x \;\rightarrow\; x^2+3x-8x-24=1-5x$
  Tuua kõik liikmed vasakule: $x^2+3x-8x+5x-24-1=0 \;\rightarrow\; x^2-25=0$
  Puudub lineaarliige: $x^2-25=0 \;\rightarrow\; x^2=25 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{25}$
  $\rightarrow\; x_1=5 \;\; ja \;\; x_2=-5$

- $(2x+7)(7-2x)-x(x+2)=49$
  Lihtsustada: $(2x+7)(7-2x)-x(x+2)=49 \;\rightarrow\; 49-4x^2-x^2-2x=49$
  Tuua kõik liikmed vasakule: $-5x^2-2x=0$
  Puudub vabaliige: $x(-5x-2)=0 \;\rightarrow$
  lahendada kaks lineaarvõrrandit: $x=0 \;\; ja \;\; -5x-2=0 \;\rightarrow\; x_1=0 \;\; ja \;\; x_2 = -0{,}4$

- $6x+3=4x^2+7x \;\rightarrow\; -4x^2+6x-7x+3=0 \;\rightarrow\; -4x^2-x+3=0$

$$\rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-4)\cdot 3}}{2\cdot(-4)}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{-8}=\frac{1\pm 7}{-8} \;\rightarrow\; x_1=\frac{1+7}{-8}=-1 \;\; ja \;\; x_2=\frac{1-7}{-8}=\frac{3}{4}$$

Murdvõrrand

- ✓ Leida ühine nimetaja
- ✓ Kirjutada välja võõrlahendid (millega x ei võrdu)
- ✓ Lihtsustada
- ✓ Lahendada kas lineaar- või ruutvõrrand

- $\frac{7}{x-4}=2 \;\rightarrow\; \frac{7}{x-4}=\frac{2^{(x-4}}{1}$ $(ühine\ nimetaja\ on\ x-4) \;\rightarrow\; \frac{7}{x-4}=\frac{2x-8}{x-4}$
  $\rightarrow\; x-4\neq 0 \rightarrow x\neq 4$
  $7=2x-8 \;\rightarrow lahendada\ lineaarvõrrand \rightarrow\; -2x=-8-7 \rightarrow -2x=-15 \rightarrow x = 7{,}5$
- $\frac{3}{x(x-2)}=\frac{4}{x}+\frac{7}{x-2}$ → ühine nimetaja on x(x-2)

$$\rightarrow\; \frac{3}{x(x-2)}=\frac{4^{(x-2}}{x}+\frac{7}{x-2}^{(x} \;\rightarrow\; \frac{3}{x(x-2)}=\frac{4x-8+7x}{x(x-2)}$$

$\rightarrow\; x(x-2)\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq 0 \;\; ja \;\; x-2\neq 0 \rightarrow\; x\neq 2$

$3=4x-8+7x \;\rightarrow lahendada\ lineervõrrand \;\rightarrow\; -4x-7x=-8-3 \;\rightarrow\; -11x = -11 \;\rightarrow\; x=1$

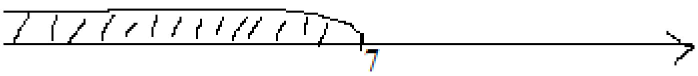
Võrratuste lahendamine

Lineaarvõrratus

- ✓ Lihtsustada
- ✓ Tuua tundmatud liikmed vasakule
- ✓ Leida lahendus (lisada joonis)

➢ $-5(2x-3)-3(1-3x)>5 \quad \rightarrow \quad -10x+15-3+9x>5 \quad \rightarrow \; -10x+9x>5-15+3$

$$\rightarrow \; -x>-7|:(-1) \quad \rightarrow \quad x<7 \quad x \in (-\infty; 7)$$

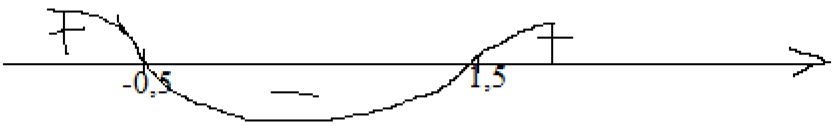


Ruutvõrratus

- ✓ Lihtsustada
- ✓ Tuua kõik liikmed vasakule
- ✓ Lahendada ruutvõrrand
- ✓ Leida lahendus joonise abil

➢ $(2x-1)^2<4 \quad \rightarrow \quad 4x^2-4x+1<4 \quad \rightarrow \quad 4x^2-4x-3<0$

$$4x^2-4x-3=0 \quad x=\frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}=\frac{4 \pm \sqrt{64}}{8}=\frac{4 \pm 8}{8} \quad x_1=1{,}5 \;\; ja \;\; x_2=-0{,}5$$



(parabool avaneb ülesse ja küsitud on vahemik, kus see on väiksem kui 0)

$$x \in (-0{,}5; 1{,}5)$$

Protsendid

- ✓ Protsent: 1% on $\frac{1}{100}$ osa tervest, ehk 1% 250-st on $250 \cdot \frac{1}{100}=2{,}5$
- ✓ Protsentülesannete lahendamisel kasutatakse: $\left| \begin{array}{ccc} A & - & 100\% \\ a & - & n\% \end{array} \right.$ (selle tabeli abil saab leida kõik vajalikud andmed)
- ✓ Promill: $1‰=\frac{1}{1000}$ osa tervest, ehk 585‰ 150-st on $150 \cdot \frac{585}{1000}=87{,}75$
- ✓ 5% on 5/100=0,05; 20% on 20/100=0,2; 125% on 125/100=1,25

Võrrandisüsteemide lahendamine

Liitmisvõte

- ✓ Korrutada võrrandit selliste arvudega, et ühe tundmatu kordajateks oleksid vastandarvud (nt. 5 ja -5)
- ✓ Liita saadud võrrandite vastavad pooled
- ✓ Leida teise tundmatu
- ✓ Esimese tundmatu leidmiseks asendada teise tundmatu väärtuse ühte võrrandisse

➢ $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$

Korrutada esimest võrrandit (-3)-ga ja teist 2-ga, siis y-I kordajad on 6 ja -6

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 | \cdot (-3) \\ 5x + 3y = 7 | \cdot 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad + \begin{cases} -9x - 6y = -12 \\ 10x + 6y = 14 \end{cases}$$

$$x = 2$$

Asendada x=2 esimesse võrrandisse: $3 \cdot 2 + 2y = 4$

$$6 + 2y = 4$$

$$2y = 4 - 6$$

$$2y = -2 | : 2$$

$$y = -1$$

Kirjutada vastus: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Asendusvõte

(hea kasutada, kui mõnel tundmatul ühes võrrandis puudub kordaja)

- ✓ Avaldada ühest võrrandist ühte tundmatut
- ✓ Saadud avaldis asendada teise võrrandisse selle tundmatu asemele
- ✓ Leida ühte tundmatut
- ✓ Kasutades esimeses punktis saadud avaldist leida teist tundmatut

➢ $\begin{cases} 4x - y = -5 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$

Avaldada esimesest võrrandist y: $4x - y = -5 \quad \rightarrow \; -y = -5 - 4x | : (-1)$

$$\rightarrow y = 5 + 4x$$

Asendada saadud avaldist teise võrrandisse: $3x - 4(5 + 4x) = 6$

$$\rightarrow \quad 3x - 20 - 16x = 6$$

$$\rightarrow \quad 3x - 16x = 6 + 20$$

$$\rightarrow \quad -13x = 26 | : (-13)$$

$$\rightarrow \quad x = -2$$

Kasutades y-i avaldist leida x: $y = 5 + 4 \cdot (-2) \quad \rightarrow \quad y = 5 - 8$

$$\rightarrow \quad y = -3$$

Kirjutada vastus: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

Liikumise ülesanded

- ✓ $S = V \cdot t \quad \rightarrow \quad V = \frac{S}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{S}{V}$ – vajalikud valemid
- ✓ Koostada tabel kujul

Olukord	S (teepikkus)	V(kiirus)	T(aeg) kujul $t = \frac{S}{V}$
I			
II			

- ✓ Koostada võrrand
- ✓ Lahendada võrrand
- ✓ Valida sobivad vastused

➢ Kaater sõitis jõel 80 km allavoolu ja pöördus siis tagasi, kulutades edasi-tagasi sõiduks 9 tundi. Leida kaatri kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 2 km/h.

Koostada tabel:

	teepikkus	kiirus	Aeg $t = \frac{S}{V}$
Pärivoolu	80 km	x+2	$\frac{80}{x+2}$
vastuvoolu	80 km	x-2	$\frac{80}{x-2}$

Kuna kokku läks sõiduks aega 9 tundi, saab koostada võrrandi:

$$\frac{80}{x+2} + \frac{80}{x-2} = 9$$

Lahendada võrrand: $\frac{80}{x+2}^{(x-2} + \frac{80}{x-2}^{(x+2} = \frac{9}{1}^{((x-2)(x+2)} \quad |\cdot (x+2)(x-2), \quad x \neq -2 \; ja \; x \neq 2$

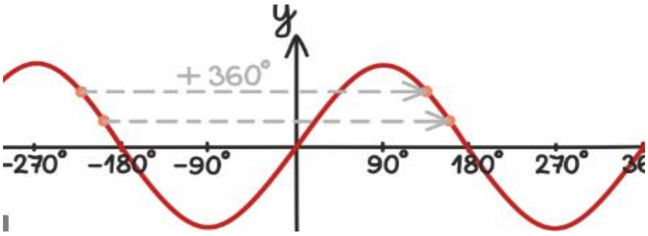
$$80(x-2) + 80(x+2) = 9(x^2 - 4)$$
$$80x - 160 + 80x + 160 = 9x^2 - 36$$
$$-9x^2 + 160x + 36 = 0$$

$$x = \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 36}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-160 \pm 164}{-18} \qquad x_1 = 18 \;\; ja \;\; x_2 = -\frac{2}{9}$$

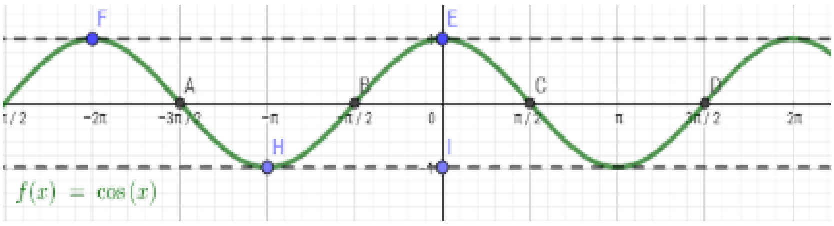
Teine lahend ei sobi kuna kiirus ei saa olla negatiivne.
Vastus: Kaatri kiirus on 18km/h

Trigonometrilised funktsioonid

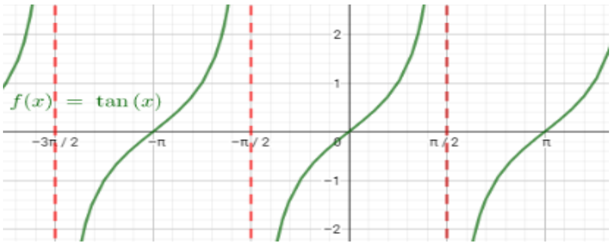
- ✓ $y = sinx$



- ✓ $y = cosx$



- ✓ $y = tanx$



Trigonometrilised põhivalemid

- ✓ $sin^2x + cos^2x = 1$
- ✓ $\frac{sinx}{cosx} = tanx$
- ✓ $1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$
- ✓ $\sin(90° - \alpha) = cos\alpha$
- ✓ $\cos(90° - \alpha) = sin\alpha$
- ✓ $\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{tan\alpha} = cot\alpha$

- ➢ Lihtsustada avaldis

$$(sinx + cosx)^2 - 1 = kasutan\ abivalemit = sin^2x + 2 \cdot sinx \cdot cosx + cos^2x - 1$$
$$= kasutan\ esimest\ valemit = 1 + 2 \cdot sinx \cdot cosx - 1$$
$$= 2 \cdot sinx \cdot cosx$$

- ➢ $1 - \frac{cos^2\alpha}{1+sin\alpha} = 1 - \frac{1-sin^2\alpha}{1+sin\alpha} = 1 - \frac{\cancel{(1+sin\alpha)}(1-sin\alpha)}{\cancel{1+sin\alpha}} = 1 - (1 - sin\alpha) = 1 - 1 + sin\alpha = sin\alpha$

Täisnurkne kolmnurk

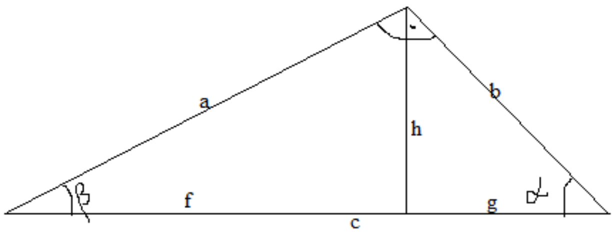
- ✓ Pythagorase teoreem: Kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga
- ✓ Nurkade leidmiseks võib kasutada valemeid:

- $sin\alpha = \frac{vastaskaatet}{hüpotenuus}$
- $cos\alpha = \frac{lähiskaatet}{hüpotenuus}$
- $tan\alpha = \frac{vastaskaatet}{lähiskaatet}$

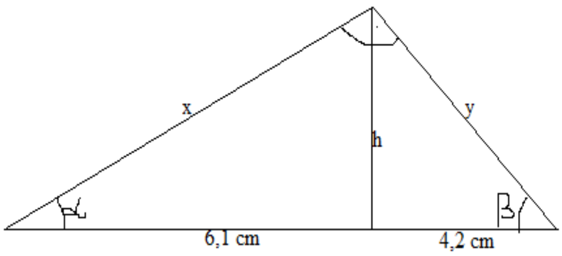
✓ Kolmnurgas nurkade summa on 180°

✓ Pindala: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$

✓ $a^2 = f \cdot c; \quad b^2 = g \cdot c; \quad h^2 = f \cdot g$



➢ Leida täisnurkse kolmnurga puuduvad küljed, nurgad ja pindala.



$g = 6{,}2cm; \quad f = 4{,}2\ cm$

$x; y; h; \ \alpha; \ \beta; S - ?$

Kuna c=g+f, siis saab leida kolmnurga hüpotenuusi:

$$c = 6{,}1 + 4{,}2 = 10{,}3(\ cm)$$

Kasutades viimaseid valemeid saab leida x, y ja h:

$$a^2 = f \cdot c \quad \rightarrow \quad x^2 = 6{,}1 \cdot 10{,}3 = 62{,}83 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{62{,}83} \approx 7{,}9(cm)$$

$$b^2 = g \cdot c \quad \rightarrow \quad y^2 = 4{,}2 \cdot 10{,}3 = 43{,}26 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{43{,}26} \approx 6{,}6(cm)$$

$$h^2 = f \cdot g \quad \rightarrow \quad h^2 = 4{,}2 \cdot 6{,}1 = 25{,}62 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{25{,}62} \approx 5{,}1(cm)$$

Nurkade leidmiseks kasutan, näiteks, sin funktsiooni:

$$sin\alpha = \frac{vastaskaatet}{hüpotenuus} \quad \rightarrow \quad sin\alpha = \frac{y}{c} \quad \rightarrow \quad sin\alpha = \frac{6{,}6}{10{,}3} \approx 0{,}6408 \quad \rightarrow \quad \alpha = 39{,}84°$$

Kuna kolmnurgas nurkade summa on 180°, siis saab leida ka teist teravnurka:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta = 90° \quad \rightarrow \quad \beta = 90° - \alpha \quad \rightarrow \quad \beta = 90° - 39{,}84° = 50{,}16°$$

Pindala leidmiseks saab kasutada mõlemaid valemeid, kuna kõik vajalikud andmed on olemas:

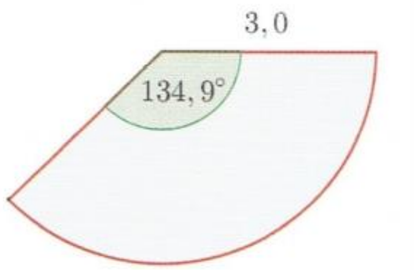
$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{7{,}9 \cdot 6{,}6}{2} \approx 26{,}1(cm^2) \quad või \quad S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{10{,}3 \cdot 5{,}1}{2} \approx 26{,}2(cm^2)$$

(Vahevastuste ümardamise tõttu võivad lõppvastused olla mõne kümnendiku võrra erinevad)

Ringjoone pikkus ja ringi sektori pindala

- ✓ Ringi pindala: $S_o = \pi \cdot r^2$
- ✓ Ringjoone pikkus: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$
- ✓ Sektori pindala: $S = \frac{S_o}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha$
- ✓ Kaare pikkus: $l = \frac{C}{360} \cdot \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360} \cdot \alpha$

- ➢ Arvutage joonisel oleva sektori pindala ja ümbermõõt:



$r = 3\ cm\ ja\ \alpha = 134{,}9°. S\ ja\ P-?$

$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad S = \frac{\pi \cdot 3^2}{360} \cdot 134{,}9 \approx 10{,}6(cm^2)$$

$$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360} \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{360} \cdot 134{,}9 \approx 7{,}1(cm)$$

Ümbermõõdu leidmiseks tuleb liita kõik kujundi küljed:

$$P = r + r + l \quad \rightarrow \quad P = 3 + 3 + 7{,}1 = 13{,}1(cm)$$

Kolmnurga lahendamine

- ✓ Siinusteoreem:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

- ✓ Koosinusteoreem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$$

- ✓ Kolmnurga pindala:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad S = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} \quad S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, kus\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

- ➢ Arvutage kolmnurga puuduvad küljed, nurgad ja pindala
  a) $a = 12\ cm,\ b = 13\ cm\ ja\ c = 15\ cm$

Nurga leidmiseks saab kasutada koosinusteoreemi ja avaldada sellest nurga koosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha \quad \rightarrow \quad cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad \rightarrow$$

. $cos\alpha = \frac{13^2+15^2-12^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} \approx 0{,}6410 \quad \rightarrow \quad \alpha = 50{,}13°$

Täpselt samamoodi saab leida ka teist nurka:

$$cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \rightarrow \quad cos\beta = \frac{12^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 12 \cdot 15} \approx 0{,}555 \quad \rightarrow \quad \beta = 56{,}25°$$

Ja kolmanda nurga leidmiseks saab kasutada: $\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \rightarrow \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta$

$$\rightarrow \gamma = 180° - 50{,}13° - 56{,}25° = 73{,}62°$$

Pindala:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{12 \cdot 13 \cdot sin73{,}62°}{2} \approx 74{,}8(cm^2)$$

b) $a = 23\ dm,\ \alpha = 46°\ ja\ \beta = 58°$

Saab leida kolmandat nurka valemist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \quad \rightarrow \quad \gamma = 180° - 46° - 58° = 76°$$

Külgede leidmiseks saab kasutada siinusteoreemi:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{23}{sin46°} = \frac{b}{sin58°} = \frac{c}{sin76°}$$

$$\rightarrow \quad b = \frac{23 \cdot sin58°}{sin46°} \approx 27(dm)$$

$$\rightarrow \quad c = \frac{23 \cdot sin76°}{sin46°} \approx 31(dm)$$

Pindala:

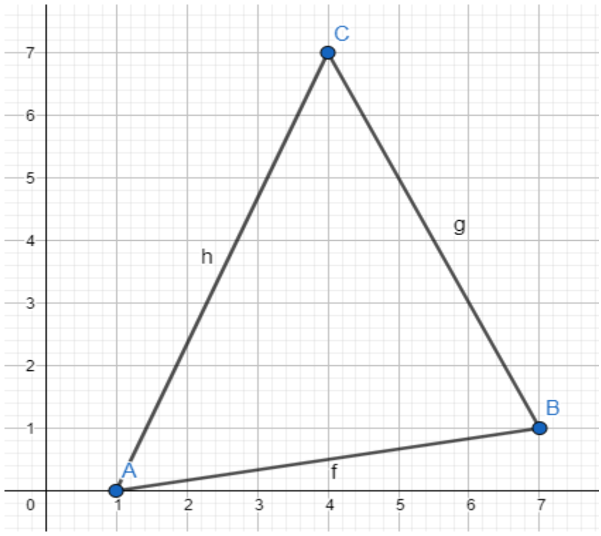
$$S = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{23 \cdot 27 \cdot sin76°}{2} \approx 301{,}3(dm^2)$$

Vektorid

- ✓ Lõigu keskpunkt, kui alguspunkt on $A(x_1;\ y_1)$ ja lõpp-punkt on $B(x_2;\ y_2)$:
$$K\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
- ✓ Vektori koordinaadid, kui vektori alguspunkt on $A(x_1;\ y_1)$ ja lõpp-punkt on $B(x_2;\ y_2)$: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) = (X; Y)$
- ✓ Vektori pikkus: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- ✓ Vektorite liitmine ja lahutamine, kui $\vec{u} = (x_1;\ y_1)\ ja\ \ \vec{v} = (x_2;\ y_2)$:
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2)$$
- ✓ Vektori korrutamine arvuga: $k \cdot \vec{u} = (kx_1; ky_1)$
- ✓ Skalaarkorrutis
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\varphi$
- ✓ Ristumise tunnus: $\vec{u}\ \perp \vec{v} \quad \leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- ✓ Kollineaarsuse (paralleelsuse) tunnus: $\vec{u}\ \parallel \vec{v} \ \leftrightarrow\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

- On antud kolmnurk tippudega A(1;0), B(7; 1) ja C(4; 7).
    1) Arvutage kolmnurga ümbermõõt
    2) Arvutage suurim sisenurk
    3) Leidke kolmnurga pindala
    4) Arvutage lühimale küljele joonestatud kõrgus (täpsusega 0,1)

1) Ümbermõõdu leidmiseks tuleb leida kõik küljed.
Saab kasutada vektorite valemeid:



$\overrightarrow{AB} = (7-1; 1-0) = (6; 1) \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{37} \approx 6{,}1 \text{ (ü)}$

$\overrightarrow{AC} = (4-1; 7-0) = (3; 7) \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}6 \text{ (ü)}$

$\overrightarrow{BC} = (4-7; 7-1) = (-3; 6) \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2+6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7 \text{ (ü)}$

$$P = 6{,}1 + 7{,}6 + 6{,}7 = 20{,}4 \text{ (ü)}$$

2) Suurim sisenurk on suurima külje vastas ehk AC vastasnurk. See tähendab, et tuleb leida nurk vektorite $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ vahel.

$$\overrightarrow{BA} = (-6;\ -1) ja\ |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{37} \approx 6{,}1(\text{ü}) \quad ja$$

$$\overrightarrow{BC} = (4-7; 7-1) = (-3; 6) \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2+6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7 \text{ (ü)}$$

Valemist $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\varphi$ tuleb avaldada nurga koosinus:

$$cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \quad \rightarrow \quad cos\angle ABC = \frac{-6\cdot(-3)+(-1)\cdot 6}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{45}} = \frac{12}{\sqrt{1665}} \approx 0{,}2941 \qquad \angle ABC \approx 73°$$

3) Kolmnurga pindala leidmiseks saab kasutada valemit:

$$S = \frac{a\cdot b\cdot sin\gamma}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{6{,}1\cdot 6{,}7\cdot sin73°}{2} \approx 19{,}5(pü)$$

4) Kõrguse leidmiseks saab kasutada teist pindala valemist, kust saab avaldada kõrgust:

$$S = \frac{a\cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2\cdot S}{a}$$

Kuna kõrgus on joonestatud lühimale küljele, siis selles valemis $a = 6{,}1$ü

$$h = \frac{2\cdot 19{,}5}{6{,}1} \approx 6{,}4(\text{ü})$$

Sirged

- ✓ Tõusu ja algordinaadiga määratud sirge:

  $y = k\cdot x + b,$ kus k on sirge tõus ja b on algordinaat
- ✓ Punkti ja tõusuga määratud sirge:

  $y - y_1 = k\cdot(x - x_1),$ kus k on sirge tõus ja punkti koordinaadid on $(x_1;\ y_1)$

- ✓ Kahe punktiga määratud sirge:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$ kus ühe punkti koordinaadid on $(x_1;\ y_1)$ ja teise punkti koordinaadid on $(x_2;\ y_2)$

- ✓ Ristuvate sirgete tunnus:

$k_1 \cdot k_2 = -1$, kus k_1 on ühe sirge tõus ja k_2 on teise sirge tõus.

- ➢ On antud punktid A(-3; -1), B(4; -3) ja C(6; 5)
  1) Leidke sirge, millel asub kolmnurga külg AC
  2) Leidke sirge, mis läbib punkti B ja on eelmises punktis saadud sirgega paralleelne
  3) Leidke sirge, mis läbib punkti C ja on risti punkte A ja B läbiva sirgega

1) Kasutan valemit $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ja punkte A(-3; -1) ja C(6; 5):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \rightarrow \frac{x-(-3)}{6-(-3)}=\frac{y-(-1)}{5-(-1)} \rightarrow \frac{x+3}{9}=\frac{y+1}{6} \rightarrow kasutan\ ristkorrutist \rightarrow 9(y+1)=6(x+3) \rightarrow 9y+9=6x+18 \rightarrow 9y=6x+18-9 \rightarrow 9y=6x+9\ |:9 \rightarrow y=\frac{2}{3}x+1$$

$y=\frac{2}{3}x+1$ – sirge, millel asub külg AC

2) Kui sirged on paralleelsed, siis nende tõusud on võrdsed ehk otsitava sirge tõus on $\frac{2}{3}$. See sirge läbib punkti B(4; -3). Saab kasutada valemit: $y-y_1=k\cdot(x-x_1)$

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1) \rightarrow y-(-3)=\frac{2}{3}(x-4) \rightarrow y+3=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}-3 \rightarrow y=\frac{2}{3}x-5\frac{2}{3}$$

$y=\frac{2}{3}x-5\frac{2}{3}$ - sirge, mis läbib B punkti ja on AC-ga paralleelne

3) Esialgu tuleb leida AB läbiva sirge võrrand (nagu esimeses punktis)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \rightarrow \frac{x-(-3)}{4-(-3)}=\frac{y-(-1)}{-3-(-1)} \rightarrow \frac{x+3}{7}=\frac{y+1}{-2} \rightarrow kasutan\ ristkorrutist \rightarrow 7(y+1)=-2(x+3) \rightarrow 7y+7=-2x-6 \rightarrow 7y=-2x-6-7 \rightarrow 7y=-2x-13\ |:7 \rightarrow y=\frac{-2}{7}x-1\frac{6}{7} \rightarrow k=\frac{-2}{7}$$

Kui sirged on risti, siis nende tõusude korrutis peab olema -1. Tuleb leida otsitava sirge tõus:

$$k_1\cdot k_2=-1 \rightarrow k_2=\frac{-1}{k_1} \rightarrow k_2=\frac{-1}{\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Otsitav sirge läbib punkti C(6; 5) ja tõus on 3,5:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 5 = 3{,}5 \cdot (x - 6) \quad \rightarrow \quad y - 5 = 3{,}5x - 21 \quad \rightarrow \quad y = 3{,}5x \rightarrow -21 + 5 \quad \rightarrow \quad y = 3{,}5x - 16$$

$y = 3{,}5x - 16$ - sirge, mis läbib C punkti ja on risti AB-ga.

Muud jooned

- ✓ Ringjoone võrrand kui raadius on r ja keskpunkti koordinaadid on $K(a; b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Tõenäosusteooria

- ✓ Klassikaline tõenäosus: $P = \frac{m}{n} = \frac{soodsad\ võimalused}{kõik\ võimalused}$
- ✓ Kindel sündmus: $P = 1$
- ✓ Võimatu sündmus: $P = 0$
- ✓ Kombinatoorika elemendid:
  - Faktoriaal: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$
  - Kombinatsioon: $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

➢ Riiulil on 7 eestikeelset, 5 ingliskeelset ja 3 venekeelset raamatut. Kui suur on tõenäosus, et ühe raamatu juhuslikul võtmisel saadakse

- Eestikeelne raamat: :

$$P = \frac{m}{n} = \frac{soodsad\ võimalused}{kõik\ võimalused} \quad \rightarrow \quad P = \frac{eestikeelsed}{kõik} = \frac{7}{15}$$

- Araabiakeelne koraan: Võimatu sündmus $\rightarrow \quad P = 0$
- Vene- või ingliskeelne raamat: :

$$P = \frac{m}{n} = \frac{soodsad\ võimalused}{kõik\ võimalused} \quad \rightarrow P = \frac{vene + inglise}{kõik} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

➢ Kastis on 12 valget õuna, 9 punast õuna ja 4 kollast õuna.

a) Mitu võimalust on 3 õuna valikuks? Teisiti küsimust võib sõnastada: mitmel viisil saab kombineerida 25 õuna kolme kaupa ehk küsitakse kombinatsioonide arvu:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad \rightarrow \quad C_{25}^3 = \frac{25!}{3! \cdot (25-3)!} = 2300$$

b) Kui tõenäoline on, et kahe õuna võtmisel saadakse valged õunad?

Seda ülesannet saab lahendada kasutades nii klassikalist tõenäosust, kui ka kombinatoorikat:

- Kui suur on tõenäosus, et me võtame valge õuna JA valge õuna :

$$P = valge\ ja\ valge = \frac{valge}{kõik}\ ja\ \frac{ülejäänud\ valge}{ülejäänud\ kõik} = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0{,}22$$

- Tõenäosuse valemis saab kasutada kombinatsioone:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{soodsad\ võimalused}{kõik\ võimalused} = \frac{kaks\ valget\ õuna\ 12 - st}{kaks\ õuna\ 25 - st} = \frac{C_{12}^2}{C_{25}^2} = \frac{66}{300} = \frac{11}{50} = 0{,}22$$

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} = 66 \qquad C_{25}^2 = \frac{25!}{2! \cdot 23!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23!}{2 \cdot 1 \cdot 23!} = 300$$

c) Kui tõenäoline on, et kolme õuna võtmisel saadakse erinevat värvi õunad?

Ka seda ülesannet saab lahendada erineval viisil:

- Võetakse üks valge õun JA üks punane õun JA üks kollane õun. Siin tuleb meeles pidada, et õunu saab võta ka teises järjekorras (6 võimalust):

$$P = \frac{valge}{kõik}\ ja\ \frac{punane}{ülejäänud\ kõik}\ ja\ \frac{kollane}{ülejäänud\ kõik}\ korda\ 3 = \frac{12}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{4}{23} \cdot 6 \approx 0{,}19$$

- Kombinatsioonide abil:

$$P = \frac{üks\ 12 - st(valge)\ ja\ üks\ 9 - st(punane)\ ja\ üks\ 4 - st(kollane)}{kolm\ 25 - st} = \frac{C_{12}^1 \cdot C_9^1 \cdot C_4^1}{C_{25}^3} = \frac{12 \cdot 9 \cdot 4}{2300} \approx 0{,}19$$

Statistika

- ✓ Variatsioonrida – korrastatud statistiline rida (kasvavas või kahanevas järjekorras)
- ✓ Sagedus- ja jaotustabel – igale väärtusele vastab selle esinemiste arv(ja suhteline sagedus %-es)
- ✓ Tulpdiagramm – sagedus- või jaotustabeli andmed kantud teljestikule
- ✓ Keskmine väärtus - $\bar{x} = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{N}$, kus $a_1, a_2, \dots, a_n$ on tunnuse väärtused, N on nende arv. Kui sagedus tabel on koostatud, siis võib kasutada ka valemit: $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1+x_2 \cdot f_2+\cdots+x_n \cdot f_n}{N}$
- ✓ Mood – tunnuse kõige sagedamini esinev väärtus
- ✓ Mediaan – väärtus, millest suuremaid ja väiksemaid liikmeid on variatsioonreas ühepalju.

➢ Bioloogia tasemetestis võis maksimaalselt saada 20 punkti. Kängumetsa gümnaasiumi abiturientide tulemused protokollis on 19, 20, 20, 18, 16, 18, 19, 19, 20, 21, 17, 16, 17, 18, 19, 16, 17, 19, 19, 15, 17, 18 ja 20.

a) Korrastage andmed ja koostage variatsioonrida.

Saab korrastada kasvavas või kahanevas järjekorras, tavaliselt tehakse kasvavas:

15, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 21

b) Mitu tulemust tuli statistilisest reast kõrvaldada? Miks?
Kõrvale jäetakse üks tulemus – 21 punkti, sest see on võimalikust maksimumist suurem.

c) Leidke tulemuste aritmeetiline keskmine, mood ja mediaan.
Saab kasutada keskmise leidmiseks teist valemit kuna variatsioonreast on näha mitu ühesugust väärtust on:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n}{N} \rightarrow$$

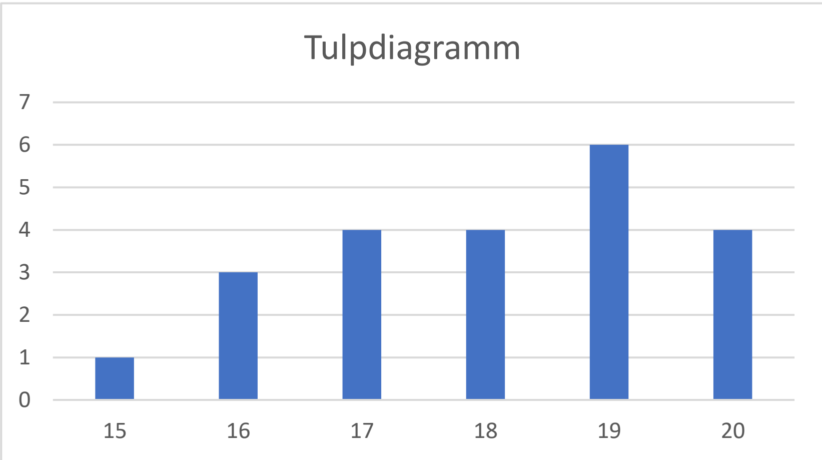
$$\bar{x} = \frac{15 + 16 \cdot 3 + 17 \cdot 4 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 6 + 20 \cdot 4}{22} = \frac{397}{22} \approx 18$$

Mood on see väärtus, mida on kõige rohkem ehk $Mo = 19$
Mediaan jääb variatsioonrea keskele. Kuna variatsioonreas on 22 väärtust, siis keskele jäävad üheteistkümnes ja kaheteistkümnes liige ja mediaan on nende keskmine:

$$Me = \frac{18 + 18}{2} = 18$$

d) Koostage sagedustabel ja joonestage selle põhjal sobiv diagramm.

x	f
15	1
16	3
17	4
18	4
19	6
20	4
kokku	22

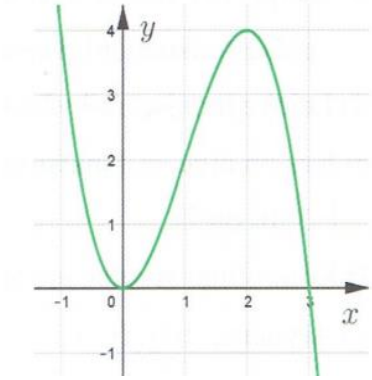


Funktsioonid

- ✓ Funktsioon – vastavus, mis seab sõltumatu muutuja x igale väärtusele vastavusse sõltuva muutuja y ühe kindla väärtuse.
- ✓ Funktsiooni uurimine:
  - Nullkohad: $f(x) = 0$
  - Positiivsuspiirkond: $X^+ : f(x) > 0$;negatiivsuspiirkond: $X^- :\ f(x) < 0$
  - Kasvamisvahemik: $X \uparrow :\ kui\ x_2 > x_1, siis\ ka\ f(x_2) > f(x_1)$

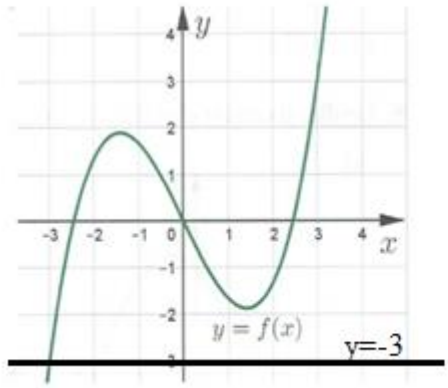
    Kahanemisvahemik: $X \downarrow :\ kui\ x_2 > x_1, siis\ ka\ f(x_2) < f(x_1)$
- ✓ Paarisfunktsioon – sümmeetriline y-telje suhtes ja $f(-x) = f(x)$;
- ✓ Paaritu funktsioon – sümmeetriline punkti (0; 0) suhtes ja $f(-x) = -f(x)$

- Leidke joonisel oleva funktsiooni nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud.



$$X_0 = \{0; 3\}$$
$$X^+ = (-\infty; 0) \cup (0;\ 3)$$
$$X^- = (3;\ \infty)$$
$$X \uparrow = (0; 2)$$
$$X \downarrow_1 = (-\infty; 0) \quad X \downarrow_2 = (2;\ \infty)$$

- Joonisel on funktsiooni $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ graafik.
  a) Leidke $f(3)\ \ ja\ \ 3f(-3)$.
  b) Kas $f(x)$ on paarisfunktsioon?
  c) Leidke funktsiooni $f(x)$ suurim väärtus lõigul $[-2; 3]$
  d) Leidke joonise abil võrratuse $f(x) < -3$ lahendid
  e) Kas on õige, et funktsiooni $f(x)$ suurim väärtus lõigul $[-3; 0]$ on 2?
  f) Kontrollige arvutamise teel, kas punkt $P(2;\ -1\frac{2}{3})$ paikneb funktsiooni $y = f(x)$ graafikul.



a) $$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 = \frac{27}{3} - 6 = 9 - 6 = 3$$
$$3f(-3) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)\right) = 3 \cdot \left(\frac{-27}{3} + 6\right) = 3 \cdot (-9 + 6) = -9$$

b) Funktsioon ei ole paaris, sest graafik pole sümmeetriline y-telje suhtes.

c) Graafikult on näha, et lõigul $[-2; 3]$ kõige kõrgem punkt on kohal x=3 ja funktsiooni väärtus sellel kohal on juba välja arvutatud punktis a): $f(3) = 3$

d) Joonisel saab näidata kus asub joon $y = -3$ ja vaadata, millisel vahemikul graafik on sellest joonest allpool: $x \in (-\infty;\ -3)$

e) Ei ole õige, sest ka joonisel on näha, et graafik ei tõuse kaheni.

f) $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 4 = 2\frac{2}{3} - 4 = -1\frac{1}{3}\ \neq\ -1\frac{2}{3}$ → punkt ei asu graafikul

Logaritm-ja eksponentvõrrandid

- ✓ $\log_a b = c \quad \leftrightarrow \quad a^c = b$

- ✓ $\log_a 1 = 0$
- ✓ $\log_a a = 1$
- ✓ $\log_{10} x = \log x$
- ✓ $\log_e a = lna$
- ✓ $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- ✓ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- ✓ $\log_a x^n = \text{n} \cdot \log_a x$
- ✓ Tehted astmetega samad, mis 1. kursuse materjalides (lk.4)

➢ Lahendage logaritmvõrrand

1. $\log(2x-1) + \log(2x+1) = 2 \quad \rightarrow \quad \log(2x-1)\cdot(2x+1) = 2$

Kui kasutada $\log_a b = c \quad \leftrightarrow \quad a^c = b$, siis saab $10^2 = (2x-1)(2x+1)$

$$4x^2 - 1 = 100 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 101 \,|:4 \quad \rightarrow$$

$$x^2 = 25{,}25 \quad \rightarrow \quad x_1 = \sqrt{25{,}25} \quad x_2 = -\sqrt{25{,}25}$$

Tuleb kontrollida, kas mõlemad lahendid sobivad logaritmvõrrandi lahendiks. Logaritmeeritav peab alati olema positiivne arv. Teise lahendi puhul on näha, et see reegel ei kehti, see tähendab, et võrrandi vastus on: $x_1 = \sqrt{25{,}25}$

2. $log^2 x - 2\log x = 3$

Siin saab teha asendust: $\log x = a$ ja lahendada tavalist ruutvõrrandit:

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = 3 \quad ja \quad a_2 = -1$$

Nüüd tuleb leida ka x-i väärtused:

$$\log x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 10^3 = 1000 \quad ja \quad \log x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 10^{-1} = 0{,}1$$

➢ Lahendage eksponentvõrrand

1. $3^{x+4} = 27 \quad \rightarrow \quad 3^{x+4} = 3^3 \quad \rightarrow \quad x + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad x = 3 - 4 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Kontroll: $\left| \begin{array}{l} Vp\!: 3^{-1+4} = 3^3 = 27 \\ \quad Pp\!: \; 27 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad 27 = 27 \quad \rightarrow Vp = Pp$

2. $2^{x+2} - 2^{x+1} = 32$

Siin tuleb kasutada valemit $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$: $2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^1 = 32$

Siin on mõttekas teha asendus: $2^x = a$ ja lahendada tavalist lineaarvõrrandit:

$$4a - 2a = 32 \quad \rightarrow \quad 2a = 32 \,|:2 \quad \rightarrow \quad a = 16$$

Nüüd tuleb leida x-i väärtus:

$$2^x = 16 \quad \rightarrow \quad x = 4 \quad (sest\ x^4 = 16)$$

Kontroll: $\left| \begin{array}{l} Vp\!: \; 2^{4+2} - 2^{4+1} = 2^6 - 2^5 = 64 - 32 = 32 \\ \qquad\qquad Pp\!: 32 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad 32 = 32 \quad \rightarrow Vp = Pp$

- $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
  Saab teha asendust: $2^x = a$ ja lahendada ruutvõrrandit:
  $$a^2 - 5a + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 \quad ja \quad a_2 = 1$$
  Nüüd tuleb leida x-ide väärtused:
  $$2^x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2\ (sest\ 2^2 = 4) \qquad ja \quad 2^x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0\ (sest\ 2^0 = 1)$$

Kontroll: $x = 2$: $\left| \begin{matrix} Vp: 4^2 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 16 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0 \\ Pp: 0 \end{matrix} \right. \rightarrow 0 =$
$0 \quad \rightarrow \qquad Vp = Pp$

$x = 0$: $\left| \begin{matrix} Vp:\ 4^0 - 5 \cdot 2^0 + 4 = 1 - 5 \cdot 1 + 4 = 0 \\ Pp: 0 \end{matrix} \right. \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \quad \rightarrow Vp = Pp$

Liitprotsendid

- ✓ $L = A \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$, $kus\ L - lõppväärtus, A - algväärtus, p - muutus\ protsentides\ ja\ n - tsüklite\ arv(aeg)$

- Auto soetati 26000 euro eest ja selle väärtus väheneb ühe aastaga 15%.
  a) Arvutage auto väärtus, kui autot on 5 aastat kasutatud.
  $$L = A \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n, kus\ A = 26000, p = 15\%\ ja\ n = 5$$
  $$L = 26000 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)^5 = 26000 \cdot 0{,}85^5 = 11536{,}34(€)$$
  b) Mitme täisaasta pärast on auto kaotanud poole oma väärtusest?
  $$L = 13000, A = 26000; p = 15\%\ ja\ n - ?$$
  $$13000 = 26000 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)^n \quad \rightarrow \quad 13000 = 26000 \cdot 0{,}85^n$$
  $$\rightarrow \quad 0{,}85^n = \frac{13000}{26000} \quad \rightarrow \quad 0{,}85^n = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad n = \frac{log 0{,}5}{log 0{,}85} \approx 4{,}3(aastat)$$

Funktsiooni tuletis

- ✓ $c' = 0; \quad x' = 1; \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- ✓ $(u \pm v)' = u' \pm u'$
- ✓ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- ✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
- ✓ $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

$u\ ja\ v\ on\ funktsioonid\ ja\ c\ on\ tegur$

Funktsiooni tuletise rakendused

- ✓ Funktsiooni uurimisel:
  - Nullkohad: $f(x) = 0$
  - Positiivsuspiirkond: X^+: $f(x) > 0$;negatiivsuspiirkond: X^-: $f(x) < 0$
  - Ekstreemumkohad: X_e: $f' = 0$
  - Kasvamisvahemik: $X \uparrow$: $f'(x) > 0$; kahanemisvahemik: $X \downarrow$: $f'(x) < 0$

- ✓ Puutuja võrrandi koostamisel: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$,

$kus\ puutepunkti\ koordinaadid\ on\ (x_0;\ y_0)$

- ➢ On antud funktsioon $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
  - Leidke selle funktsiooni tuletis

$$f'(x) = -2 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 1 - 0 = -4x + 3$$

Vastus: tuletis on $f' = -4x + 3$

- Leidke selle funktsiooni puutuja tõus punktis (2;-6)

Funktsiooni puutuja tõus punktis on selle funktsiooni tuletise väärtus kohal x_0.

$$k = f'(2) = -4 \cdot 2 + 3 = -8 + 3 = -5$$

Vastus: tõus on k=-5

- Koostage võrrand selle funktsiooni puutujale punktis (2;-6)

Puutuja võrrandi leian sirge valemiga: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$, kus $x_0\ ja\ y_0$ on punkti koordinaadid ja k on tõus:

$$y - (-6) = -5(x - 2) \quad \to \quad y + 6 = -5x + 10 \quad \to \quad y = -5x + 4$$

Vastus: puutuja võrrand punktis (2;-6) on $y = -5x + 4$

- ➢ Leidke parabooli $y = 2x^2 - 8x - 3$ puutuja punktides, milles sirge $y = 2x - 3$ lõikab parabooli.

Leian parabooli ja sirge lõikepunktid, selle jaoks lahendan võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Kui võrrandisüsteemis on kaks võrrandit niisugusel kujul, siis kõige lihtsam on kasutada asendusvõtet:

$2x^2 - 8x - 3 = 2x - 3$ ja leida x-de väärtused:

$$2x^2 - 8x - 3 = 2x - 3$$
$$2x^2 - 10x = 0$$
$$2x(x - 5) = 0$$

Lahendan kaks võrrandit: $2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad ja \quad x - 5 = 0 \quad \to \quad x = 5$

$$x_1 = 0 \quad ja \quad x_2 = 5$$

Nüüd leian ka y-te väärtused (ei pea asendama igasse võrrandisse):

$$y_1 = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \quad ja \quad y^2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

See tähendab et lõikepunktid on A(0;-3) ja B(5;7)

Leian puutuja võrrandi valemiga: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Leian tuletise: $f'(x) = 2 \cdot 2x - 8 \cdot 1 - 0 = 4x - 8$

Puutuja punktis A(0;-3).
Leian tõusu väärtuse: $f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8$
Leian puutuja võrrand: $y - (-3) = -8(x - 0) \quad \rightarrow \quad y + 3 = -8x \quad \rightarrow \quad y = -8x - 3$

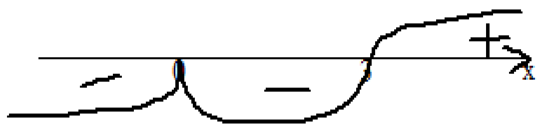
Puutuja punktis B(5;7).
Leian tõusu väärtuse: $f'(5) = 4 \cdot 5 - 8 = 12$
Leian puutuja võrrand: $y - 7 = 12(x - 5) \quad \rightarrow y - 7 = 12x - 60 \quad \rightarrow \quad y = 12x - 53$

Vastus: puutujate võrrandid on $y = -8x - 3$ ja $y = 12x - 53$

- Uurige funktsiooni ja skitseerige tema graafik
  - $y = x^3 - 3x^2$

Klassikaline funktsiooni uurimine: $X;\ X_0;\ X^+;\ X^-;\ X_e; X \uparrow;\ X \downarrow\ \rightarrow\ graafik$

1) Kuna funktsioonil pole murde ega ruutjuurt, siis määramispiirkond on
$$X = (-\infty;\ \infty)\ või\ X = \mathbb{R}$$
2) Leian nullkohad: $x^3 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\ \ ja\ \ x_2 = 3$
$$X_0 = \{0; 3\}$$
3) Leian positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad. Selleks kasutan abijoonist (kannan arvteljele nullkohad)



(kui pole kindel mispidi see joon läheb, katsetage kõik vahemikud eraldi, näiteks, võtan 0 ja 3 vahelt arvu1, asendan sellega x-i algfunktsioonis ja saan: $1^3 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = -2$, näen, et vastus on negatiivne, tähendab, et ka vahemikus on „-„ märk)
Kirjutan välja piirkonnad:
$$X^+ = (3; \infty) \quad X^- = (-\infty; 0) \cup (0; 3)$$
4) Leian ekstreemumpunktid. Selleks kasutan tuletist.

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Ja lahendan jälle võrrandi: $3x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad 3x(x - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\ \ ja\ \ x_2 = 2$

$$X_e = \{0; 2\}$$

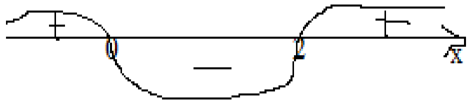
$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$$

Leidsin funktsiooni tähendused ekstreemumkohtades. Kirjutan ekstreemumpunktide koordinaadid (y-väärtuse järgi otsustan liiki)

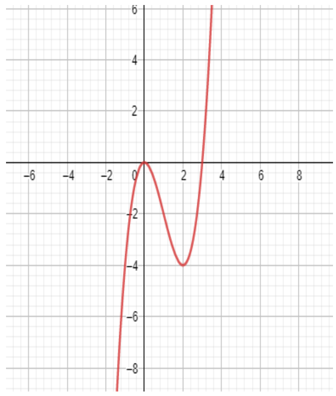
$$P_{min}(2;\ -4) \quad ja \quad P_{max}(0;\ 0)$$

5) Leian kasvamis-ja kahanemisvahemikud. Selleks kasutan abijoonist (kannan arvteljele ekstreemumkohad)



$X \uparrow = (-\infty; 0) \quad X \uparrow = (2;\ \infty) \quad X \downarrow = (0;\ 2)$

6) Kui kõik punktid ja vahemikud on leitud, siis saab skitseerida graafik:



Aritmeetiline jada

- ✓ $aritmeetilise\ jada$ üldliige: $\quad a_n = a_1 + (n-1)\cdot d,$

  $kus\ a_1 - esimene\ liige, d - vahe\ ja\ n - liikme\ järjekorranumber$
- ✓ $aritmeetilise\ jada\ esimese\ n - liikme\ summa$: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n$

- ➢ Liisa otsustas hakata reisi jaoks raha koguma. Esimese kuuga säästis ta 150 eurot, kuid iga järgneva kuuga 10 eurot vähem kui eelneva kuuga. Kas tal õnnestub aastaga sel moel koguda 1050€ maksva reisi raha?

Kuna summa muutub 10 euro VÕRRA, siis tegemist on aritmeetilise jadaga, kus

$$a_1 = 150; \quad d = -10(väheneb); \quad S_{12} - ?$$

Aritmeetilise jada summa valem on: $S_n = \frac{2\cdot a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n$

$$S_{12} = \frac{2\cdot 150 + (12-1)\cdot(-10)}{2}\cdot 12 = 1140(€)$$

Ühe aastaga kogub 1140 €, mis tähendab, et reisiks raha jätkub.

- ➢ Uue tootmisliini käikulaskmisel planeeriti esimese kuu toodanguks 30 tonni, kusjuures igal järgneval kuul taheti toodangut suurendada 3,5 tonni võrra. Kui suur on liini toodang pool aastat pärast käikulaskmist? Mitu tonni toodangut on liin selle ajaga andnud?

Kui mingi asi suureneb või väheneb ühe ja sama koguse võrra, siis tegemist on aritmeetilise jadaga ja ma kasutan kahte valemit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad ja \quad S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n \;\; või \;\; S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Andmed: $a_1 = 30$

$d = 3{,}5$

$a_6 =? \;\; ja \;\; S_6 =?$

Kasutan valemeid ja leian koguse poole aasta pärast, ehk kuuendal kuul ja koguse poole aastaga ehk kuue kuu jooksul:

$$a_6 = a_1 + 5d \quad \rightarrow \quad a_6 = 30 + 5 \cdot 3{,}5 = 47{,}5(t) - \; kuuendal\ kuul$$

$$S_6 = \frac{30 + 47{,}5}{2} \cdot 6 = 232{,}5(t) \; - \; kuue\ kuu\ jooksul\ kokku$$

Vastus: liini toodang pool aastat pärast käikulaskmist oli 47,5 tonni ja 232,5tonni toodangut on liin selle ajaga andnud.

- Arst soovitas haigel hakata tegema jalutuskäike, alustades kodust edasi-tagasi kõndides kokku 500 meetriga ning suurendades iga päev oma jalutuskäigu pikkust 200 m võrra.
  1) Kui pika jalutuskäigu teeb haige seitsmendal päeval?

Kui iga päev jalutuskäigu pikkus suurenes ühe ja sama suuruse võrra, siis tegemist on aritmeetilise jadaga, kus $a_1 = 500$ ja $d = 200$

Leian a_7: $a_n = a_1 + (n-1)d \quad \rightarrow \quad a_7 = 500 + 6 \cdot 200 = 1700(m)$- haige kõndis seitsmendal päeval.

2) Kui palju kõnnib haige nende seitsme päeva jooksul kokku?

Et leida kui palju haige kõnnib seitsme päevaga kokku, tuleb leida S_7

$$S_n = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot n \rightarrow \quad S_7 = \frac{500 + 1700}{2} \cdot 7$$
$$= 7700(m) - \text{haige kõndis seitsme päeva jooksul}$$

3) Kui kaugele kodust jõuab haige kümnendal päeval?

Leian a_{10}: $a_{10} = 500 + 9 \cdot 200 = 2300(m) - kõndis\ haige\ kümnendal\ päeval.$

Kuna haige kõndis edasi-tagasi, siis ta jõudis $\frac{2300}{2} = 1150(m)$ kaugusele kodust

Geomeetriline jada

- ✓ $geomeetrilise\ jada$ üldliige: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ kus\ a_1 - esimene\ liige, q - geomeetrilise\ jada\ tegur\ ja\ n - liikme\ järjekorranumber$
- ✓ $geomeetrilise\ jada\ esimese\ n - liikme\ summa$: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

- Geomeetrilise jada kolmas liige on 54 ja viies liige on 121,5.
    1) Leidke selle jada tegur ja esimene liige

Kasutades eelolevaid valemeid, saab avaldada tegur ja esimene liige:

$$a_5 = a_3 \cdot q^2 \quad \rightarrow \quad q^2 = \frac{a_5}{a_3} \quad \rightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{a_5}{a_3}} \quad \rightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{121,5}{54}} \quad \rightarrow q_1 = 1,5\ \ ja\ \ q_2 = -1,5$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_3}{q^2} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{54}{2,25} = 24$$

Nende andmetega saab koostada kaks geomeetrilist jada:

$$a_1 = 24\ \ ja\ \ q = 1,5 \quad või \quad a_1 = 24\ \ ja\ \ q = -1,5$$

2) Leidke selle jada kuue esimese liikme summa ja seitsmes liige.

Kuue esimese liikme summa leidmiseks kasutatakse valemit:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \rightarrow$$

$$S_6 = \frac{24 \cdot (1,5^6 - 1)}{1,5 - 1} = 498,75\ \ või\ \ S_6 = \frac{24 \cdot ((-1,5)^6 - 1)}{-1,5 - 1} = -99,75$$

Seitsmenda liige leidmiseks kasutatakse valemit:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \rightarrow \quad a_7 = 24 \cdot 1,5^6 = 273,375$$

Kuna tegur on paarisarvulise astmega, siis mõlema jada seitsmes liige on 273,375

3) Leidke mitu protsenti moodustab kahekümnes liige kahekümne esimesest .

$$a_{21} = 24 \cdot 1,5^{20} = 79806,2\ \ ja\ \ a_{20} = 24 \cdot 1,5^{19} = 53204,1$$

$$\left| \begin{array}{l} 53204,1 - x\% \\ 79806,2 - 100\% \end{array} \right. \qquad x = \frac{53204,1 \cdot 100}{79806,2} \approx 66,7\%$$

Määramata integraal

- ✓ $\int dx = x + C$
- ✓ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- ✓ $\int e^x dx = e^x + C$
- ✓ $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$

Määratud integraal

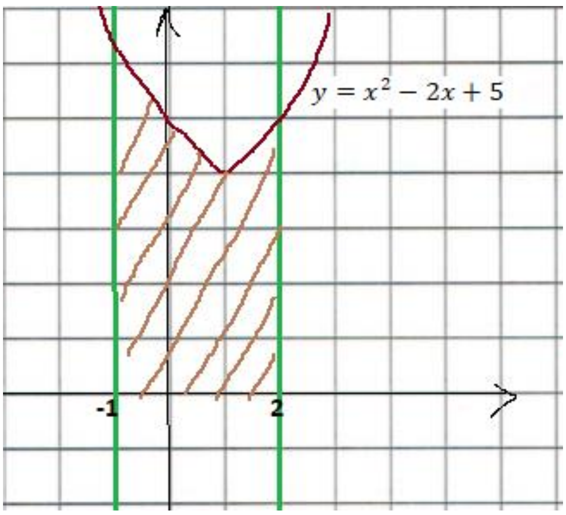
- ✓ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Kõvertrapetsi pindala

- ✓ $S = \int_a^b f(x)$

➢ Kõvertrapetsit piiravad jooned $y = x^2 - 2x + 5$, $x = -1$; $x = 2$ ja x-telg.

- Joonistage kõvertrapets koordinaatteljestikku



Rohelisega on märgitud rajad, mis tekstis on $x = -1$; $x = 2$ ja parabooli joonestamiseks kas koostan tabeli või leian nullkohad ja haripunkt...võrrandil $x^2 - 2x + 5 = 0$ lahendeid pole, see tähendab, et parabool ei lõika x-telge ja haripunkti leian valemiga $x_h = \frac{-b}{2a}$:

$$x_h = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1, \quad y_h = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$
$$\rightarrow \quad H(1; 4)$$

- Arvutage kõvertrapetsi pindala

Kõvertrapetsi pindala leian integreerimise abil.

Kujund on piiratud joontega $y = x^2 - 2x + 5$, $x = -1$; $x = 2$ ja x-teljega. -1 ja 2 on rajad ja $x^2 - 2x + 5$ on integreeritav funktsioon:

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 5)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 5x|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 4 + 10\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 5\right)$$
$$= \frac{8}{3} - 4 + 10 + \frac{1}{3} + 1 + 5 = 15(pü)$$

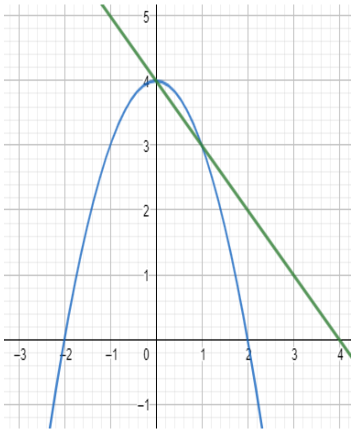
➢ Leidke kujundi pindala, kui kujundit piiravad järgmised jooned.

$$x + y = 4 \quad ja \quad x^2 + y = 4$$

Teen joonise. Sirge joonestamiseks leian kaks punkti, mida sirge läbib ja parabooli joonestamiseks leian haripunkti ja nullkohad:

$$x + y = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4 - x$$

x	0	1
Y	4	3



$$x^2 + y = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4 - x^2$$

$4 - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 = -4 \quad \rightarrow x^2 = 4 \quad x_1 = 2 \quad ja \quad x_2 = -2$ need on parabooli nullkohad

$$x_h = \frac{2 - 2}{2} = 0 \quad ja \quad y_h = 4 - 0^2 = 4$$

$H(0; 4)$ parabooli haripunkt.

See väike osa sinise ja rohelise joone vahel ongi kujund, mille pindalat tuleb leida.

Nüüd leian kahe joone lõikekohad: $4 - x^2 = 4 - x$

$$-x^2 + x = 0$$

$$-x(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ja \quad x_2 = 1$$

Pindala leidmiseks kasutan määratud integraali rajadega 0 ja 1 ja funktsioon on ülemise parabooli ja alumise sirge vahe:

$$\int_0^1 \left(4 - x^2 - (4 - x)\right)dx$$

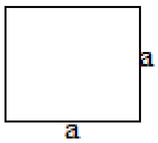
$$= \int_0^1 (4 - x^2 - 4 + x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 - 2}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(pü)$$

Planimeetria

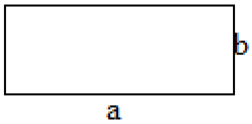
Ruut

- ✓ $S = a^2$
- ✓ $P = 4 \cdot a$

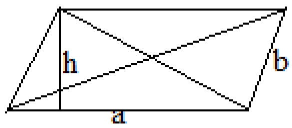


Ristkülik

- ✓ $S = a \cdot b$
- ✓ $P = 2 \cdot (a + b)$

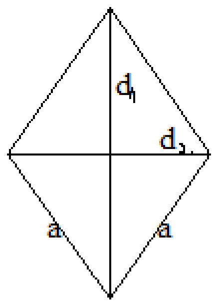


Rööpkülik



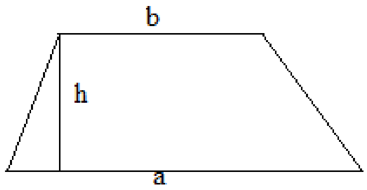
- ✓ $S = a \cdot h = a \cdot b \cdot sin\varphi$
- ✓ $P = 2 \cdot (a + b)$
- ✓ $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

Romb



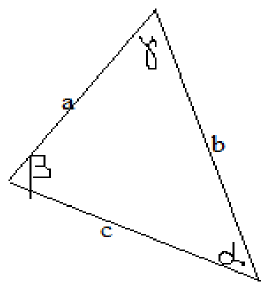
- ✓ $S = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
- ✓ $P = 4 \cdot a$
- ✓ $d_1 \perp d_2$

Trapets



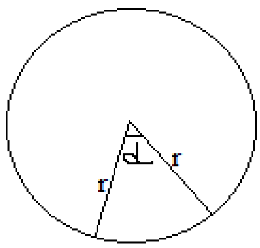
- ✓ $S = k \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Kolmnurk



- ✓ $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$
- ✓ $P = a + b + c$
- ✓ $Siinusteoreem: \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$
- ✓ $Koosinusteoreem: a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$

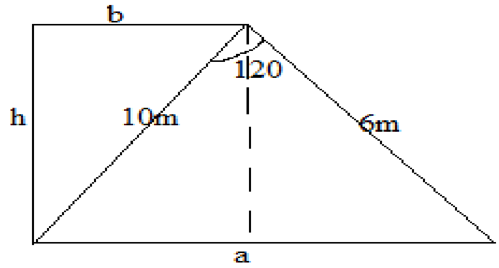
Ring ja ringi osad



- ✓ $Ringjoone\ pikkus: C = 2\pi r$
- ✓ $Ringi\ pindala: S = \pi r^2$
- ✓ $Kaare\ pikkus: L = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$
- ✓ $Sektori\ pindala: S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$

- ➢ Metsaäärne peenramaa on täisnurkse trapetsi kujuline. Peenramaad tahetakse metsloomade eest kaitsta võrguga. Trapetsikujulise peenramaa lühem diagonaal on 10 m, pikem haar 6 m ja nendevaheline nurk on 120°. Mitu meetrit võrku kulub peenramaa piiramiseks? Lõppvastus esitage täpsusega üks meeter.

Ümbermõõdu leidmiseks tuleb leida a, b ja h suurused.



Leian a (kasutan koosinusteoreemi, kuna on teada kaks külge ja NENDEVAHELINE nurk):

$$a = \sqrt{10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot cos120°} = \sqrt{196} = 14(m)$$

Leian h. Selle suuruse leidmiseks saab kasutada igasuguseid lahendusvõtteid, mina valin ehk kõige lihtsama:

Kahe külje ja nendevahelise nurga abil leian kolmnurga pindala: $S = \frac{10 \cdot 6 \cdot sin120°}{2} \approx 26(m^2)$

Ma tean veel ühte pindala valemit $S = \frac{a \cdot h}{2}$ ja siit ma avaldan h: $h = \frac{2 \cdot S}{a} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2 \cdot 26}{14} \approx 3{,}7(m)$

Jooniselt on näha, et kolmnurga kõrgus on sama mis trapetsi külg h.

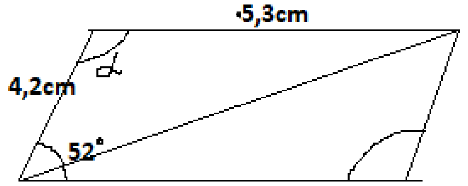
Leian b. Kasutan teises kolmnurgas, mis on täisnurkne, Pythagorase teoreemi:

$$b = \sqrt{10^2 - 3{,}7^2} = \sqrt{86{,}31} \approx 9{,}3(m)$$

Ja nüüd on võimalik leida trapetsi ümbermõõt: $P = 9{,}3 + 3{,}7 + 14 + 6 = 33(m)$

- Rööpküliku küljed on 5,3 cm ja 4,2 cm ning teravnurk 52°. Arvutage rööpküliku pikema diagonaali pikkus. Mitu korda on pikem diagonaal suurem rööpküliku lühemast küljest?

  Rööpkülik on diagonaaliga jaotatud kaheks võrdseks kolmnurgaks. Ühes kolmnurgas ma tean, et küljed on 5,3cm ja 4,2 cm ja nendevaheline nurk on 180°-52°=128°. Kasutan koosinuslauset:



$$d = \sqrt{5{,}3^2 + 4{,}2^2 - 2 \cdot 5{,}3 \cdot 4{,}2 \cdot cos128°} \approx 8{,}55(cm)$$

$$\frac{8{,}55}{4{,}2} \approx 2\ korda$$

Ruumikujundite pindalad ja ruumalad

Kuup

- ✓ $S = 6 \cdot a^2$
- ✓ $V = a^3$

Püströöptahukas

- ✓ $S_t = 2 \cdot S_p + S_k$
- ✓ $S_k = P \cdot H$
- ✓ $V = S_p \cdot H$

Püramiid

- ✓ $S_t = S_p + S_k$
- ✓ $S_k = \frac{P}{2} \cdot m$
- ✓ $V = \frac{S_p \cdot H}{3}$

Silinder

- ✓ $S_t = 2 \cdot S_p + S_k$
- ✓ $S_p = \pi R^2$
- ✓ $S_k = C \cdot H = 2\pi R \cdot H$
- ✓ $V = S_p \cdot H$

Koonus

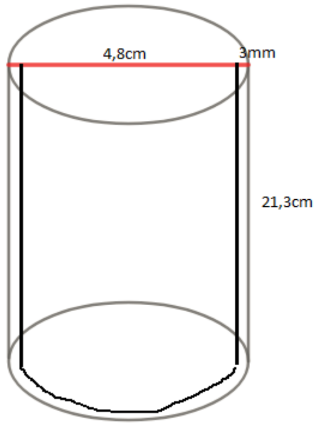
- ✓ $S_t = S_p + S_k$
- ✓ $S_p = \pi R^2$
- ✓ $S_k = \pi \cdot R \cdot m$
- ✓ $V = \frac{S_p \cdot H}{3}$

Kera

- ✓ $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$
- ✓ $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

- ➢ Silindrikujulise klaasi väline läbimõõt on 4,8 cm ja väline kõrgus 21,3 cm. Klaasi paksus on 3 mm. Kui raske on see klaas(klaasi tihedus 2,5g/cm^3)?

On teada, et massi leidmiseks tuleb kasutada valemit: $m = V \cdot \rho$, kus V on klaasi ruumala ja ρ on klaasi tihedus.



Klaasi ruumala saab leida kahe ruumala vahena, kus üks on väline ruumala ja teine on siseruumala.

Leian välise ruumala: silindri raadius on $r = \frac{d}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{4,8}{2} = 2,4(cm)$ ja silindri kõrgus on 21,3cm

Silindri ruumala valem on $V = \pi r^2 H \quad \rightarrow \quad V = \pi \cdot 2,4^2 \cdot 21,3 \approx 385,4(cm^3)$

Leian siseruumala: silindri raadius on $r = 2,4 - 0,3 = 2,1(cm)$ võtan maha seina paksuse ja kõrgus on $H = 21,3 - 0,3 = 21(cm)$ võtan maha põhja paksuse

Silindri ruumala valem on $V = \pi r^2 H \quad \rightarrow \quad V = \pi \cdot 2,1^2 \cdot 21 \approx 290,9(cm^3)$

Leian klaasi ruumala: $V = 385,4 - 290,9 = 94,5(cm^3)$

Leian, kui raske on klaas: $m = V \cdot \rho \quad \rightarrow \quad m = 94,5 \cdot 2,5 = 236,3(g)$

- Korrapärase kolmnurkse püstprisma kujulisse vaasi valatakse pool liitrit vett. Vaasi kõrgus on 25 cm ja põhiserv on 18cm.
    - Arvutage veetaseme kõrgus vaasis.

Vaasis on pool liitrit vett, mis tähendab, et vee ruumala on $0,5dm^3$ või $500cm^3$.

Prisma ruumala valem on: $V = S_p \cdot H \quad \rightarrow \quad H = \frac{V}{S_p}$

Näen, et kõrguse leidmiseks on vaja põhja pindalat. Kuna prisma on korrapärane, siis põhjas on võrdkülgne kolmnurk ja selle pindala leidmiseks on mitu võimalust. Mina kasutan seda teadmist, et võrdkülgses kolmnurgas kõik nurgad on 60^o ja leian pindala valemiga:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2} \quad \rightarrow \quad S = \frac{18 \cdot 18 \cdot sin60°}{2} \approx 140,3(cm^2)$$

Leian H: $H = \frac{V}{S_p} \quad \rightarrow \quad H = \frac{500}{140,3} \approx 3,6(cm)$

- Kui suur osa vaasi sisust jääb täitmata?

Kuna vaasi põhjapindala ei muutu, aga muutub ainult kõrgus, siis võrrelda saab ka ainult kõrgusi. Pole kirjutatud kas see osa peab olema ruumala ühikutes, protsentides või osa tervikust... Mina arvutan protsentides:

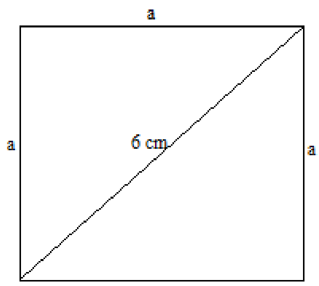
Vaasi kõrgus on 25 cm ja täitmata osa kõrgus on 25-3,6=21,4cm, siis $x = \frac{21,4 \cdot 100}{25} = 85,6\%$

- Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 15 cm ja põhja diagonaal on 6 cm

1) Arvutage põhiserva pikkus

Leian a. Ruudus on kaks ühesugust täisnurkset kolmnurka ja kolmnurga kaateti leidmiseks kasutan Pythagorase teoreemi:

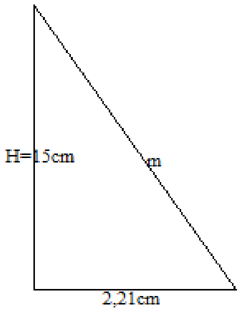
$$a^2 + a^2 = 6^2 \quad \rightarrow \quad 2a^2 = 36 \quad \rightarrow \quad a^2 = 18 \quad \rightarrow a = \sqrt{18} \approx 4{,}42(cm)$$



2) Arvutage püramiidi apoteemi pikkus

Selles täisnurkses kolmnurgas üks kaatet on püramiidi kõrgus ja teine kaatet on pool põhjaservast. Leian apoteemi:

$$m = \sqrt{15^2 + 2{,}21^2} \approx 15{,}15(cm)$$



3) Arvutage püramiidi ruumala

Püramiidi ruumala valem: $V = \frac{S_p \cdot H}{3}$.

Esimeses punktis oli leitud S_p täpne väärtus $S_p = a^2 = 18(cm^2)$.

Siis ruumala on: $V = \frac{18 \cdot 15}{3} = 90(cm^3)$