Haridus- ja Noorteamet

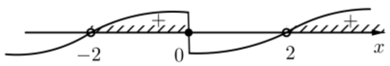
Matemaatika RE põhieksami 2021 ülesanded ja hindamisjuhend

LAI

Ülesanne 1. (5 punkti)

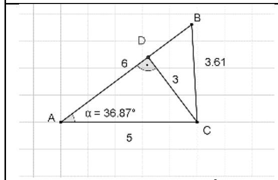
On antud funktsioon $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$.

Leidke
1) funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond;
2) muutuja x kolm väiksemat täisarvulist väärtust, mis kuuluvad funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda.

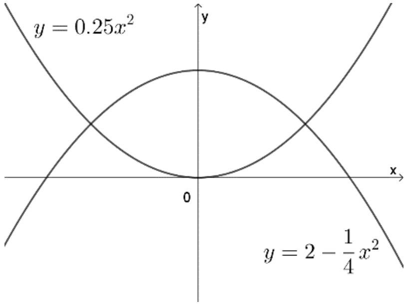
Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1) $X\colon \frac{x}{x^2-4} \geq 0$  Vastus. $X = (-2;\ 0] \cup (2;\ \infty)$ 2) Vastus. $x \in \{-1; 0; 3\}$	Murdvõrratuse lahendamine ja vastus (4 punkti). Muutuja x väärtuste leidmine (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 1**

Ülesanne 2. (5 punkti)

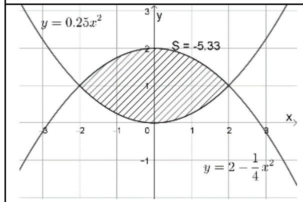
Teravnurkse kolmnurga *ABC* kaks külge on $AB = 6$ dm ja $AC = 5$ dm. Kolmnurga *ABC* pindala on võrdne sellise ruudu pindalaga, mille küljeks on kolmnurga tipust *C* joonestatud kõrgus *CD*. Arvutage nurk *BAC*.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
 $AB = 6$ dm $AC = 5$ dm $S_{ABC} = CD^2$ $\alpha = ?$ $S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin\alpha}{2} = CD^2$ ja $\sin\alpha = \frac{CD}{AC}$ Asendame: $\frac{5 \cdot 6 \cdot CD}{2 \cdot 5} = CD^2$ Või $\frac{AB \cdot CD}{2} = CD^2$, millest $\frac{6 \cdot CD}{2} = CD^2$ 1) $CD = 0$ (vl); 2) $CD = 3$ dm $\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{3}{5} \approx 36{,}9°$ <u>Vastus.</u> Nurk *BAC* $\approx 36{,}9°$.	Ülesande sisu mõistmine (1 punkt). Kolmnurga pindala ja täisnurkse kolmnurga trigonomeetriliste funktsioonide teadmine ja rakendamine (lõigu *CD* pikkuse leidmine) (3 punkti). Nurga *BAC* leidmine (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 2**

Ülesanne 3. (5 punkti)



Joonisel on funktsioonide $y = 0{,}25x^2$ ja $y = 2 - \frac{1}{4}x^2$ graafikud.
Viirutage antud funktsioonide graafikutega piiratud kujund ja arvutage selle pindala.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
 Integraali rajad: $0{,}25x^2 = 2 - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x_{1;2} = \pm 2$ Viirutatud kujund on y-telje suhtes sümmeetriline. $S = 2 \cdot \int_0^2 (2 - 0{,}5x^2)dx = 2 \cdot \left(2x - \frac{x^3}{6}\right) \Big\vert_0^2 =$ $= 2 \cdot (4 - \frac{4}{3}) = 5\frac{1}{3}$ (pü) Või $S = \int_{-2}^2 (2 - 0{,}5x^2)dx = \left(2x - \frac{x^3}{6}\right) \Big\vert_{-2}^2 =$ $= 4 - \frac{4}{3} - \left(-4 - \frac{4}{3}\right) = 5\frac{1}{3}$ (pü) <u>Vastus.</u> Viirutatud kujundi pindala on $5\frac{1}{3}$ pindalaühikut.	Kujundi viirutamine (1 punkt). Integraali rajade arvutamine (1 punkt). Viirutatud kujundi pindala arvutamine (3 punkti).	**5 punkti**	**Kast 3**

Ülesanne 4. (5 punkti)

Lihtsustage avaldis $\left(\frac{y-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+2\sqrt{x}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
I võimalus: $\left(\frac{y-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+2\sqrt{x}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\left(\frac{y-x+2x-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\frac{1}{x-y}$ II võimalus: $\left(2\sqrt{x}+\frac{y-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\left(2\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{-1}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$ $=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{1}{x-y}$	Liitmine (3 punkti). Astendamine (1 punkt). Jagamine (1 punkt). Liitmine (3 punkti). Astendamine (1 punkt). Jagamine (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 4**

Ülesanne 5. (10 punkti)

Sõbrad Kati ja Mart mängivad noolemängu. Kati tabab märklaua südamikku tõenäosusega $\frac{5}{6}$ ja Mart tõenäosusega $\frac{6}{7}$.

1. Kui suur on tõenäosus, et
   1) nii Kati kui ka Mart tabavad esimese viskega märklaua südamikku?
   2) vähemalt üks sõpradest tabab esimese viskega märklaua südamikku?
2. Mõlemad sõbrad teevad 5 viset. Põhjendage arvutustega, kas suurem on tõenäosus, et
   1) Kati tabab märklaua südamikku täpselt 3 korral või
   2) Mart tabab märklaua südamikku täpselt 4 korral?

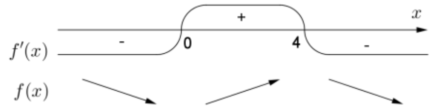
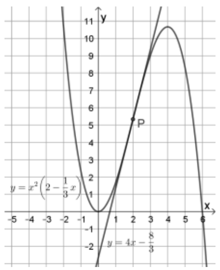
Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. 1) A: Nii Kati kui ka Mart tabavad esimese viskega märklaua südamikku $p_1 \cdot p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5}{7}$ <u>Vastus.</u> Tõenäosus, et nii Kati kui ka Mart tabavad esimese viskega märklaua südamikku, on $\frac{5}{7}$.	Tõenäosuse arvutamine (korrutamislause) (1 punkt).	**1 punkt**	**Kast 5**
2) B: Vähemalt üks sõpradest tabab esimese viskega märklaua südamikku, st 3 võimalust – Kati tabab ja Mart ei taba või Kati ei taba ja Mart tabab või mõlemad tabavad Kati: tabab $p_1 = \frac{5}{6}$; ei taba $\overline{p_1} = \frac{1}{6}$ Mart: tabab $p_2 = \frac{6}{7}$; ei taba $\overline{p_2} = \frac{1}{7}$ $p_1 \cdot \overline{p_2} + \overline{p_1} \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{41}{42}$ II võimalus – vastandsündmuse kaudu: $\overline{B}$: kumbki ei taba $\overline{p_1} \cdot \overline{p_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ sündmuse B tõenäosus on $1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$ III võimalus – mittevälistavate sündmuste tõenäosuste summa $p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{41}{42}$	Vastandsündmuste tõenäosuste leidmine (1 punkt). Tõenäosuse arvutamine (korrutamislause ja liitmislause või vastandsündmuse tõenäosus või mittevälistavate sündmuste summa tõenäosus) (3 punkti).	**4 punkti**	**Kast 6**

Vastus. Tõenäosus, et vähemalt üks sõpradest tabab esimese viskega märklaua südamikku, on $\frac{41}{42}$. 2. 1) C: Kati tabab märklaua südamikku täpselt 3 korral $P_{5;3} = C_5^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{625}{3888} \approx 0{,}161$ 2) D: Mart tabab märklaua südamikku täpselt 4 korral $P_{5;4} = C_5^4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{6480}{16807} \approx 0{,}386$ Vastus. Tõenäosus, et Mart tabab märklaua südamikku täpselt 4 korral, on suurem.	Tõenäosuste arvutamine (kokku 4 punkti). Tulemuste võrdlemine / vastus (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 7**

Ülesanne 6. (10 punkti)

On antud funktsioon $f(x) = x^2\left(2 - \frac{1}{3}x\right)$.

1. Leidke selle funktsiooni
   1) ekstreemumkohad ja määrake nende liik;
   2) kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
2. Funktsiooni $f(x)$ graafikule on punkti P joonestatud puutuja, mille tõus on 4. Leidke punkti P koordinaadid.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x - x^2$	Funktsiooni tuletise leidmine.	**2 punkti**	**Kast 8**
1) X_e: $f'(x) = 0$ $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_{min} = 0; x_{max} = 4$.  Vastus. $x_{min} = 0; x_{max} = 4$. 2) Vastus. $X\uparrow = (0; 4)$; $X\downarrow = (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$	Tingimuse teadmine, ekstreemumkohtade leidmine ja nende liigi määramine (kokku 3 punkti). Kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmine (ruutvõrratuse lahendamine) (2 punkti).	**5 punkti**	**Kast 9**
2. $k = f'(x_0)$; $4x - x^2 = 4 \Rightarrow x_0 = 2$ ja $y_0 = 5\frac{1}{3}$  Vastus. Punkt $P\left(2; 5\frac{1}{3}\right)$.	Tingimuse teadmine ja punkti P koordinaatide leidmine.	**3 punkti**	**Kast 10**

Ülesanne 7. (10 punkti)

Lahendage võrrandid.

1. $\log_2\left(\frac{1}{6}x^2-2\right)=2\log_2 x-\log_2 9$.
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{x-1}=1{,}5$.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. $\log_2\left(\frac{1}{6}x^2-2\right)=2\log_2 x-\log_2 9$ $\log_2\left(\frac{1}{6}x^2-2\right)=\log_2(\frac{x^2}{9})$ $\frac{1}{6}x^2-2=\frac{x^2}{9}\Rightarrow x^2=36;\ x_{1;2}=\pm 6$ Kontroll. 1) $x=6$ vp $\log_2\left(\frac{1}{6}\cdot 36-2\right)=\log_2 4=2$ pp $2\log_2 6-\log_2 9=\log_2\frac{36}{9}=\log_2 4=2$; vp = pp 2) $x=-6$ (võõrlahend) vp $\log_2\left(\frac{1}{6}\cdot 36-2\right)=\log_2 4=2$ pp $2\log_2(-6)$ ... Vastus. $x=6$	Logaritmi omaduste kasutamine (2 punkti). Võrrandi lahendamine (2 punkti). Kontroll, sh võõrlahendi eemaldamine (2 punkti).	**6 punkti**	**Kast 11**
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{x-1}=1{,}5$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2(x-1)}=1{,}5$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2x+2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $x=3$ Vastus. $x=3$	Astendamise reeglite kasutamine ja võrrandi lahendamine.	**4 punkti**	**Kast 12**

Ülesanne 8. (10 punkti)

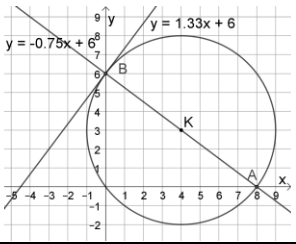
1. aprillil esitleti uut arvutimängu ja juba esimesel päeval laaditi mängu arvukalt alla. Alates 2. aprillist kasvas mängu allalaadimiste arv eelmise päevaga võrreldes ühe ja sama arvu võrra. On teada, et 10. aprillil oli allalaadimisi 2 korda rohkem kui 4. aprillil ja esimese 15 päevaga oli uue mängu allalaadimiskordi kokku 1800.
1. Mitmel korral laaditi mäng alla esitluspäeval?
2. Analüüs näitas, et esimese kahe kuu jooksul oli kolm järjestikust päeva, mille jooksul laaditi mängu alla kokku 1800 korda. Mis kuupäevadel see nii oli?

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. Aritmeetiline jada, kus $\begin{cases} a_{10} = 2a_4 \\ S_{15} = 1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9d = 2(a_1 + 3d) \\ \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 1800 \end{cases} \Rightarrow$ $a_1 = 36; d = 12$ <u>Vastus.</u> Mängu esitluspäeval oli allalaadimiskordi 36.	Võrrandisüsteemi koostamine (2 punkti). Võrrandisüsteemi lahendamine, sh kõik asendused a_1 ja d kaudu (kokku 4 punkti).	**6 punkti**	**Kast 13**
2. $a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 1800 \Rightarrow$ Iga liige erineb eelnevast ja järgnevast d võrra: $a_n - d + a_n + a_n + d = 1800 \Rightarrow a_n = 600$ Kui $a_n = a_1 + d(n-1)$, siis $600 = 36 + 12(n-1) \Rightarrow$ $n = 48$. Järelikult need 3 järjestikust päeva olid selle ajaperioodi 47., 48. ja 49. päev. Aprillis on 30 päeva, seega need kuupäevad olid 17., 18. ja 19. mai. <u>Vastus.</u> See oli 17., 18. ja 19. mail.	Ülesande sisu mõistmine, võrrandi koostamine ja lahendamine (3 punkti). Õigete kuupäevade leidmine (1 punkt).	**4 punkti**	**Kast 14**

Ülesanne 9. (10 punkti)

Ringjoon $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ läbib punkti $O(0;0)$ ning lõikab lisaks veel x-telge punktis *A* ja y-telge punktis *B*.
1. Arvutage punktide *A* ja *B* koordinaadid.
2. Põhjendage, et lõik *AB* on selle ringjoone diameeter.
3. Koostage ringjoonele punktis *B* joonestatud puutuja võrrand.
4. Joonestage koordinaattasandile ringjoon ja selle puutuja punktis *B*.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
Ringjoone keskpunkt on $K(4;3)$ ja raadius $r=5$. 1. $A(x;0)$, st $(x-4)^2+(0-3)^2=25 \Rightarrow$ $x_1=0;\ x_2=8$, st $A(8;0)$. $B(0;y)$, st $(0-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow$ $y_1=0;\ y_2=6$, st $B(0;6)$. <u>Vastus.</u> $A(8;0)$ ja $B(0;6)$.	Punktide *A* ja *B* koordinaatide arvutamine.	**2 punkti**	**Kast 15**
2. Lõik *AB* on selle ringjoone diameeter siis, kui 1) sirge *AB* läbib punkti *K*. Sirge *AB*: $\frac{x-8}{8}=\frac{y}{-6} \Rightarrow y=-0{,}75x+6$ Kas sirge *AB* läbib punkti *K*? $-0{,}75\cdot 4+6=3$; vp = pp, st sirge läbib punkti *K*. või 2) $AB=2r$ $AB=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}=10 \Rightarrow AB=2r$ Või 3) punkt *K* on lõigu *AB* keskpunkt: $x_K=\frac{8+0}{2}=4;\ y_K=\frac{0+6}{2}=3$	Ringjoone keskpunkti koordinaatide leidmine (1 punkt). Põhjendamine mis tahes viisil (2 punkti).	**3 punkti**	**Kast 16**
3. Ristuvate sirgete tõusude korrutis on -1, st kui sirge *AB* tõus on $k_1=-0{,}75$, siis sirge *s* tõus on $k_2=\frac{4}{3}$. Puutuja: $y-6=\frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x+6$ <u>Vastus.</u> Puutuja võrrand on $y=\frac{4}{3}x+6$.	Ristseisu tunnuse teadmine ja ristuvate sirgete tõusude leidmine (2 punkti). Puutuja võrrandi koostamine (1 punkt).	**3 punkti**	**Kast 17**

4. 	Joonise tegemine.	**2 punkti**	**Kast 18**

Ülesanne 10. (10 punkti)

1. 47. Tartu maratoni raja pikkus oli 63 km. Tarvol kulus selle distantsi läbimiseks 3 tundi 56 minutit ja 15 sekundit. Arvutage Tarvo keskmine kiirus.
2. Robin läbis 63 km pikkusel distantsil keskmiselt 6 km tunnis rohkem kui Ott ning jõudis finišisse 1 tund ja 21 minutit varem. Leidke Oti ja Robini keskmised liikumiskiirused.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. 3 h 56 min 15 s = 3,9375 h; Tarvo kiirus on $\frac{63}{3,9375} = 16$ (km/h) <u>Vastus.</u> Tarvo keskmine kiirus oli 16 km/h.	Kiiruse arvutamine, sh ajaühikute teisendamine.	**2 punkti**	**Kast 19**
2. x – Oti kiirus (km/h); $x + 6$ – Robini kiirus (km/h). Otil kulus $\frac{63}{x}$ h, Robinil $\frac{63}{x+6}$ h; 1 h 21 min = $1\frac{21}{60}h = \frac{27}{20}\ h$ Saame võrrandi. $\frac{63}{x} - \frac{63}{x+6} = \frac{27}{20} \Rightarrow \frac{378}{x(x+6)} = \frac{27}{20}$ $x^2 + 6x - 280 = 0, x \neq 0, x \neq -6$ $x_1 = -20$ (ei sobi); $x_2 = 14$ (km/h) Oti kiirus 14 km/h ja Robini kiirus $14 + 6 = 20$ km/h. <u>Kontroll.</u> Otil kulub $\frac{63}{14} = 4{,}5$ h ehk 4 h 30 min ja Robinil $\frac{63}{20} = 3{,}15$ h ehk 3 h 9 min. Aegade vahe on 1 h 21 min. <u>Vastus.</u> Oti keskmine kiirus oli 14 km/h ja Robinil 20 km/h.	Muutuja(te) tähistamine (1 punkt). Ülesande teksti mõistmine ja teksti põhjal võrrandi(te) koostamine (3 punkti). Võrrandi (või -süsteemi) lahendamine (2 punkti). Kiiruste leidmine (1 punkt). Sisuline kontroll (1 punkt).	**8 punkti**	**Kast 20**

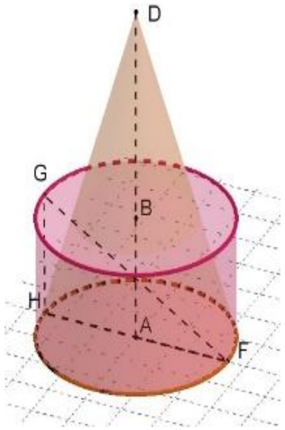
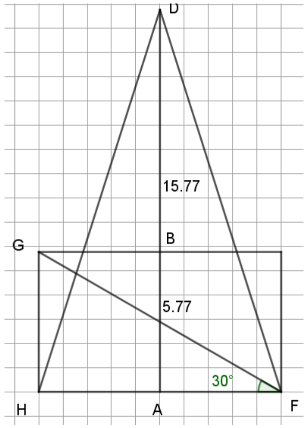
Ülesanne 11. (10 punkti)

1. Kolmnurga *ABC* küljed *AB* ja *AC* on vastavalt 25 cm ja $10\sqrt{7}$ cm ning nende külgede vahelise nürinurga siinus on $\frac{3}{4}$. Leidke külje *BC* täpne pikkus.
2. Kolmnurgas *KLM* on küljed *KL* ja *KM* vastavalt $3\sqrt{2}$ cm ja 6 cm. Nende külgede vahelise teravnurga siinus rahuldab seost $12\cos^2\alpha + 5\sin\alpha - 10 = 0$. Arvutage kolmnurga *KLM* täpne pindala.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ $BC^2 = 25^2 + \left(10\sqrt{7}\right)^2 - 2\cdot 25\cdot 10\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = 2200$ Vastus. $BC = 10\sqrt{22}$ cm.	Põhiseose teadmine ja rakendamine, nürinurga koosinuse leidmine (2 punkti). Koosinusteoreemi teadmine ja rakendamine (2 punkti).	**4 punkti**	**Kast 21**
2. $12(1-\sin^2\alpha) + 5\sin\alpha - 10 = 0$ $12\sin^2\alpha - 5\sin\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\pm 11}{24}$ $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ (ei sobi), $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ $S = \frac{3\sqrt{2}\cdot 6\cdot 2}{2\cdot 3} = 6\sqrt{2}$ (cm^2) Vastus. $S = 6\sqrt{2}$ cm^2.	Trigonomeetrilisest võrrandist $\sin\alpha$ leidmine, siinuse õige väärtuse valimine (5 punkti). Pindala arvutamine (1 punkt).	**6 punkti**	**Kast 22**

Ülesanne 12. (10 punkti)

Silindri ruumala on $\frac{250\pi}{\sqrt{3}}$ cm^3 ja silindri telglõike diagonaal moodustab silindri põhjaga nurga $30°$. Koonusel on selle silindriga ühesugune põhi ning silindri ja koonuse täispindalad on võrdsed. Arvutage koonuse kõrgus täpsusega 10^{-1} cm.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
 r – silindri / koonuse raadius h – silindri kõrgus H – koonuse kõrgus m – koonuse moodustaja Leiame silindri raadiuse ja kõrguse: $V_{silinder} = \pi r^2 h$ $\pi r^2 h = \frac{250\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow r^2 h = \frac{250}{\sqrt{3}}$ $\tan 30° = \frac{h}{2r} \Rightarrow \sqrt{3}h = 2r$ $\begin{cases} r^2 h = \frac{250}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}h = 2r \end{cases} \Rightarrow h = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm; $r = 5$ cm	Silindri ruumala valemi teadmine ja rakendamine (1 punkt). Silindri kõrguse ja raadiuse leidmine (võrrandisüsteemi lahendamine) (kokku 3 punkti).	**4 punkti**	**Kast 23**

Silindri ja koonuse täispindalad on võrdsed, st $2\pi r(r+h)=\pi r(r+m) \Rightarrow m=r+2h$ Koonuse moodustaja: $m=5+\frac{20}{\sqrt{3}}$ (cm) Koonuse kõrgus $H=\sqrt{m^2-r^2}$; $H=\sqrt{\left(5+\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2-5^2}=$ $=\sqrt{\frac{200(\sqrt{3}+2)}{3}}=\frac{10\sqrt{6(\sqrt{3}+2)}}{3}\approx 15{,}8$ (cm) <u>Vastus.</u> Koonuse kõrgus on 15,8 cm.	Koonuse ja silindri täispindalade teadmine ja rakendamine (2 punkti). Koonuse moodustaja arvutamine (2 punkti). Koonuse kõrguse arvutamine, sh ümardamine (2 punkti).	**6 punkti**	**Kast 24**

KITSAS

Ülesanne 1. (5 punkti)

Klass, kus õpib 32 õpilast, osales koolidevahelisel statistikavõistlusel ja võitis hea esinemise eest auhinnaks 24 kinopiletit. Kinopileti saajad otsustati valida juhuslikult. Selleks võeti 32 ühesugust ümbrikku, neist 24 sisse pandi pilet ja 8 ümbrikku jäeti tühjaks. Kõik ümbrikud suleti ja õpilased valisid üksteise järel nende seast ümbriku.

1. Kui suur osa selle klassi õpilastest jäi kinopiletist ilma?
2. Kui suur on tõenäosus, et esimesena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti?
3. Kui suur on tõenäosus, et nii esimesena kui teisena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti?

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. Kinopiletist jäi ilma 8 õpilast, st 8 32-st on: $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ (või $1-\frac{24}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$) Vastus. Kinopiletist jäi ilma $\frac{1}{4}$ ehk 25% õpilastest.	Osamäära leidmine (1 punkt).	**1 punkti**	**Kast 1**
2. A: Esimesena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti. $p(A)=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}=0{,}75$ Vastus. Tõenäosus, et esimesena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti, on 0,75.	Tõenäosuse arvutamine (1 punkt).	**1 punkt**	**Kast 2**
3. B: Nii esimesena kui teisena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti. $p(B)=\frac{24}{32}\cdot\frac{23}{31}=\frac{69}{124}\approx 0{,}556$ Vastus. Tõenäosus, et nii esimesena kui teisena ümbriku võtnud õpilane sai kinopileti, on $\frac{69}{124}\approx 0{,}556$.	Tõenäosuse arvutamine, korrutamislause rakendamine (kokku 3 punkti).	**3 punkti**	**Kast 3**

Ülesanne 2. (5 punkti)

Lihtsustage avaldis $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ ja arvutage selle täpne väärtus, kui $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
$\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$ Kui $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$, siis: $\sin 30° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	Avaldise lihtsustamine (4 punkti). Täpse väärtuse arvutamine (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 4**

Ülesanne 3. (5 punkti)

Kaubanduskeskusesse minnes oli Maril 1,6 korda rohkem raha kui Annel. Anne kulutas kaubanduskeskuses 48 eurot ehk 60% oma rahast. Selgus, et tema kulutatud rahasumma oli 2 korda väiksem kui Mari oma.

Mitu protsenti oma rahast kulutas Mari?

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
Annel oli kaubanduskeskusesse minnes $48 : 0{,}6 = 80$ eurot, Maril oli $1{,}6 \cdot 80 = 128$ eurot. Mari kulutas $2 \cdot 48 = 96$ eurot. Seega Mari kulutas oma rahast: $\frac{96 \cdot 100\%}{128} = 75\%$ <u>Vastus.</u> Mari kulutas kaubanduskeskuses 75% oma rahast.	Ülesande sisu mõistmine (1 punkt). Arvutused (4 punkti).	**5 punkti**	**Kast 5**

Ülesanne 4. (5 punkti)

Vaatluse käigus selgus, et bakteritega kaetud ala suureneb iga tunniga 18%. Vaatluse alguses oli bakteritega kaetud ala suurus 4 cm^2.

1. Arvutage, kui suur pindala on bakteritega kaetud 3 tunni möödudes.
2. Mitu tundi on möödunud vaatluse algusest, kui bakteritega kaetud pindala on 15 cm^2? Vastus ümardage ühelisteni.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $S = 4 \cdot 1{,}18^3 \approx 6{,}6$ (cm^2) <u>Vastus.</u> 3 tunni möödudes on bakteritega kaetud 6,6 cm^2.	Ülesande sisu mõistmine, pinna suuruse arvutamine.	**2 punkti**	**Kast 6**
2. $15 = 4 \cdot 1{,}18^t \Rightarrow 1{,}18^t = 3{,}75 \Rightarrow \log 1{,}18^t = \log 3{,}75 \Rightarrow$ $\Rightarrow t \log 1{,}18 = \log 3{,}75 \Rightarrow t = \frac{\log 3{,}75}{\log 1{,}18} \approx 8$ (tundi). <u>Vastus.</u> Vaatluse algusest on möödunud 8 tundi.	Võrrandi koostamine ja lahendamine ning vastuse ümardamine.	**3 punkti**	**Kast 7**

Ülesanne 5. (10 punkti)

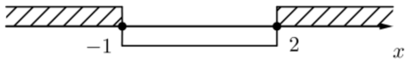
Lemmikloomade poes olid müügil hamstrid hinnaga 10 eurot tükk ja kanaarilinnud hinnaga 15 eurot tükk. Kõik poes müüdavad hamstrid ja kanaarilinnud maksid kokku 360 eurot. Ühel päeval pääsesid omaniku hooletuse tõttu kaks hamstrit ja pooled kanaarilinnud vabadusse. Põgenenud loomade ja lindude müügist oleks omanik saanud 140 eurot.

1. Mitu hamstrit ja mitu kanaarilindu oli poes esialgu?
2. Omanik otsustas, et hamstrite müügihinda ta ei muuda. Millise hinnaga peaks omanik müüma kanaarilinnud, et alles jäänud hamstrite ja kanaarilindude müügist saada endiselt 360 eurot?

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. x – esialgne hamstrite arv; y – esialgne kanaarilindude arv. Saame võrrandisüsteemi: $\begin{cases} 10x + 15y = 360 \\ 2 \cdot 10 + 15 \cdot 0{,}5y = 140 \end{cases}$ II võrrandist: $y = 16$ kanaarilindu ja I võrrandist $x = 12$ hamstrit. Või loogilise arutelu teel: Põgenenud loomade maksumus: hamstrid $2 \cdot 10 = 20$ eurot, kanaarilinnud $140 - 20 = 120$ eurot. Põgenes $120 : 15 = 8$ kanaarilindu. Esialgu oli müügil $2 \cdot 8 = 16$ kaanaarilindu, need maksid kokku $16 \cdot 15 = 240$ eurot, esialgu müügil olnud hamstrid maksid kokku $360 - 240 = 120$ eurot ja neid oli $120 : 10 = 12$. <u>Vastus.</u> Poes oli esialgu 12 hamstrit ja 16 kanaarilindu.	Muutujate tähenduse selgitamine, ülesande teksti põhjal võrrandisüsteemi koostamine (3 punkti). Võrrandisüsteemi lahendamine (3 punkti). Loogiline arutelu (6 punkti).	**6 punkti**	**Kast 8**
2. Allesjäänud hamstrite müügist sai omanik $10 \cdot 10 = 100$ eurot. Alles jäi $16 : 2 = 8$ kanaarilindu ja nende müügist peab omanik saama 360 – 100 = 260 eurot, st ühe kanaarilinnu hind peab olema $260 : 8 = 32{,}5$ eurot. <u>Vastus.</u> Omanik peaks kanaarilinde müüma hinnaga 32 eurot ja 50 senti tükk.	Mis tahes viisil (nt loogilise arutelu teel) õige tulemuseni jõudmine.	**4 punkti**	**Kast 9**

Ülesanne 6. (10 punkti)

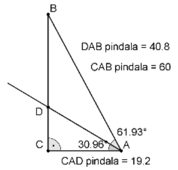
1. Lahendage võrratus $(x+1)(x+2) \geq 4(x+1)$.
2. Lahendage võrratussüsteem $\begin{cases} (x-3)^2 + 8x \leq x^2 + 17 \\ 2 - \frac{x+2}{5} < \frac{x}{3} \end{cases}$.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. $x^2 + 2x + x + 2 \geq 4x + 4$ $x^2 - x - 2 \geq 0$ $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2$  Vastus. $x \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ \infty)$	Ruutvõrratuse lahendamine.	**3 punkti**	**Kast 10**
2. $x^2 - 6x + 9 + 8x \leq x^2 + 17 \Rightarrow 2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4$ $30 - 3x - 6 < 5x \Rightarrow -8x < -24 \Rightarrow x > 3$ Vastus. $x \epsilon (3; 4]$	Esimese võrratuse lahendamine (3 punkti). Teise võrratuse lahendamine (3 punkti). Õige vastus (ühisosa leidmine) (1 punkt).	**7 punkti**	**Kast 11**

Ülesanne 7. (10 punkti)

Täisnurkse kolmnurga *ABC* kaateti *AC* pikkus on 8 cm ja pindala 60 cm^2.

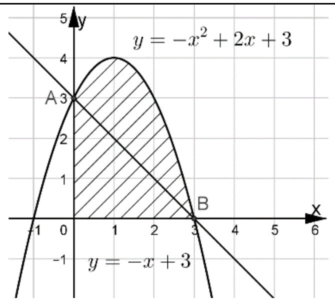
1. Arvutage kolmnurga *ABC* ümbermõõt.
2. Kaatetil *BC* asub punkt *D* nii, et lõik *AD* poolitab teravnurga *BAC*. Tehke tekstile vastav joonis ja arvutage kolmnurga *ADB* pindala.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
 $AC = 8$ cm $S_{ABC} = 60$ cm^2 $P_{ABC} = ?$ $S_{ADB} = ?$			
1. $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} \Rightarrow BC = \frac{2S}{AC}$, st $BC = \frac{2 \cdot 60}{8} = 15$ (cm) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, st $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (cm) $P_{ABC} = AB + BC + CA$, st $P_{ABC} = 17 + 15 + 8 = 40$ (cm) <u>Vastus.</u> Kolmnurga *ABC* ümbermõõt on 40 cm.	Kaateti *BC* pikkuse arvutamine (2 punkti). Hüpotenuusi *AB* pikkuse arvutamine (1 punkt). Kolmnurga *ABC* ümbermõõdu arvutamine (1 punkt).	**4 punkti**	**Kast 12**
2. Leiame lõigu *CD* pikkuse. $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC}$, st $\tan\angle BAC = \frac{15}{8} \Rightarrow \angle BAC \approx 62°$ $\tan\angle CAD = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \tan\angle CAD$, st $CD \approx 4{,}8$ cm Või nurgapoolitaja omaduse abil $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$, st $17 \cdot CD = 8 \cdot (15 - CD) \Rightarrow CD = 4{,}8$ cm $S_{ACD} = \frac{CD \cdot AC}{2}$, st $S_{ACD} = \frac{4{,}8 \cdot 8}{2} = 19{,}2$ (cm^2) $S_{ADB} = S_{ABC} - S_{ACD}$, st $S_{ADB} = 60 - 19{,}2 = 40{,}8$ (cm^2) või $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$, st $8BD = 17(15 - BD)$, st $BD = 10{,}2$ cm $S_{ADB} = \frac{1}{2} BD \cdot BA \cdot \sin\angle ABC = \frac{10{,}2 \cdot 17}{2} \cdot \frac{8}{17} = 40{,}8$ (cm^2) <u>Vastus.</u> Kolmnurga *ADB* pindala on 40,8 cm^2.	Joonise tegemine (1 punkt). Lõigu *CD* (või *BD*) pikkuse arvutamine mis tahes viisil (2 punkti). Kolmnurga *ADB* pindala arvutamine (3 punkti)	**6 punkti**	**Kast 13**

Ülesanne 8. (10 punkti)

On antud ruutfunktsioon $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ja sirge *t*, mis läbib punkte *A*(0; 3) ja *B*(3; 0).

1. Joonestage juuresolevale koordinaattasandile funktsiooni $f(x)$ graafik.
2. Viirutage joonisel I veerandis asuv kujund, mida piiravad *x*-telg ja *y*-telg ning alaülesandes 1 joonestatud graafik. Arvutage selle kujundi pindala.
3. Joonestage koordinaattasandile sirge *t* ja koostage sirge *t* võrrand.
4. Näidake arvutuste abil, et sirge *t* jaotab viirutatud kujundi kaheks võrdse pindalaga osaks.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1.  Parabooli lõikepunkt *y*-teljega: *x* = 0, $y = 3 + 0 - 0 = 3$ ja $A(0; 3)$. Parabooli haripunkti *H* koordinaadid $x_h = \frac{-1+3}{2} = 1$ (või $x_h = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$), $y_h = 3 + 2 - 1 = 4$ ja *H*(1; 4).	Funktsiooni $f(x)$ graafiku joonestamine (2 punkti).	**2 punkti**	**Kast 14**
2. $S = \int_0^3 (3 + 2x - x^2)dx = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^3 =$ $= 9 + 9 - 9 = 9$ (pü) <u>Vastus.</u> Viirutatud kujundi pindala on 9 pindalaühikut.	Kujundi viirutamine ja viirutatud kujundi pindala arvutamine (Rajad võib lugeda jooniselt) (4 punkti)	**4 punkti**	**Kast 15**
3. t: $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow y = -x + 3$	Sirge *t* joonestamine ja võrrandi koostamine (2 punkti).	**2 punkti**	**Kast 16**
4. Viirutatud kujundi alumine osa on täisnurkne kolmnurk *AOB*, mille pindala on $S = \frac{3\cdot 3}{2} = 4{,}5$ pindalaühikut ja see on kogu viirutatud kujundi pindalast pool. Järelikult sirge *t* jaotab viirutatud kujundi kaheks võrdse pindalaga osaks.	Selgitused, põhjendused (2 punkti).	**2 punkti**	**Kast 17**

Ülesanne 9. (10 punkti)

1. Lihtsustage avaldis $\left(2x + \frac{y^2-x^2}{x-y}\right)^{-1} - \left(\sqrt{x+y}\right)^2$.
2. Arvutage kirjalikult avaldise täpne väärtus, kui $x = \log_5 25$ ja $y = 27^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-3}$.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. $\left(2x + \frac{y^2 - x^2}{x - y}\right)^{-1} - \left(\sqrt{x+y}\right)^2 =$ $= \left(\frac{y^2 - x^2 + 2x^2 - 2xy}{x - y}\right)^{-1} - (x + y) =$ $= \left(\frac{(x-y)^2}{x-y}\right)^{-1} - x - y = \frac{1 - x^2 + y^2}{x - y}$	Summa leidmine sulgudes (4 punkti). Astendamine (2 punkti). Lahutamine (1 punkt).	**7 punkti**	**Kast 18**
2. Kui $x = \log_5 25 = 2$ ja $y = 27^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-3} = 9 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$ või $27^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-3} = (3^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, siis on avaldise väärtus $\frac{1-2^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2-\frac{1}{3}} = -\frac{26}{15}$.	Avaldise väärtuse arvutamine (3 punkti)	**3 punkti**	**Kast 19**

Ülesanne 10. (10 punkti)

Aritmeetilise jada vahe on $\frac{2}{3}$ ja geomeetrilise jada tegur on $\frac{2}{3}$. Nii aritmeetilise jada neljas liige kui ka geomeetrilise jada teine liige on 9.

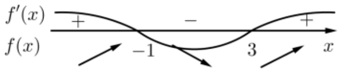
1. Arvutage mõlema jada esimene liige.
2. Arvutage aritmeetilise jada kuues liige ja esimese kuue liikme summa.
3. Arvutage geomeetrilise jada kolmanda ja kuuenda liikme summa.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
$a_1;\ a_2;\ a_3;$ ... aritmeetiline jada, mille vahe on $d = \frac{2}{3}$, $b_1;\ b_2;\ b_3;$ ... geomeetriline jada, mille tegur on $q = \frac{2}{3}$. $a_4 = b_2 = 9$. 1. Aritmeetilise jada esimese liikme leidmine: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow\ a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow\ a_1 = a_4 - 3d$ $a_1 = 9 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 7$. Geomeetrilise jada esimese liikme leidmine: $b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_1 = \frac{b_2}{q}$. $b_1 = \frac{9}{\frac{2}{3}} = 13{,}5$. Vastus. Aritmeetilise jada esimene liige on 7 ja geomeetrilise jada esimene liige 13,5.	Ülesande sisu mõistmine (2 punkti). Mõlema jada esimese liikme leidmine (kokku 2 punkti).	**4 punkti**	**Kast 20**
2. Aritmeetiline jada: $a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_6 = 7 + 5 \cdot \frac{2}{3} = 10\frac{1}{3}$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow\ S_6 = \frac{7 + 10\frac{1}{3}}{2} \cdot 6 = 52$. Vastus. Aritmeetilise jada kuues liige on $10\frac{1}{3}$ ja esimese kuue liikme summa on 52.	Aritmeetilise jada kuuenda liikme ja esimese kuue liikme summa leidmine (kokku 3 punkti).	**3 punkti**	**Kast 21**
3. Geomeetriline jada: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ $b_3 = 13{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \Rightarrow b_6 = 13{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1\frac{7}{9}$ $b_3 + b_6 = 7\frac{7}{9}$ Vastus. Geomeetrilise jada kolmanda ja kuuenda liikme summa on $7\frac{7}{9}$.	Geomeetrilise jada kolmanda ja kuuenda liikme summa leidmine (kokku 3 punkti).	**3 punkti**	**Kast 22**

Ülesanne 11. (10 punkti)

On antud funktsioon $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

1. Leidke funktsiooni $f(x)$
   1) tuletis;
   2) graafiku ekstreemumpunktid ja määrake nende liik.
2. Funktsiooni $f(x)$ graafikule on kohal $x_0 = 4$ joonestatud puutuja. Koostage selle puutuja võrrand.

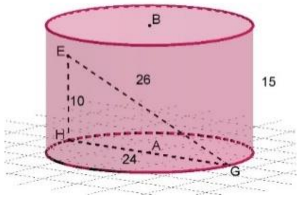
Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
1. 1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$	Tuletise leidmine (2 punkti).	**2 punkti**	**Kast 23**
2) X_e: $f'(x) = 0$ $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x_{max} = -1;\ x_{min} = 3$  $y_{max} = 15; y_{min} = -17$ <u>Vastus.</u> $E_{max}(-1;\ 15); E_{min}(3;\ -17)$.	Tingimuse teadmine ja ekstreemumkohtade leidmine (2 punkti). Ekstreemumkohtade liigi määramine (kasvamise-kahanemise joonise või II tuletise abil) ja ekstreemumpunktide koordinaatide leidmine (kokku 3 punkti).	**5 punkti**	**Kast 24**
3. $k = f'(x_0); k = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 15$ $y_0 = -10$ $y + 10 = 15(x - 4) \Rightarrow y = 15x - 70$ <u>Vastus.</u> Puutuja võrrand on $y = 15x - 70$.	Puutuja tõusu leidmine (1 punkti). Puutepunkti ordinaadi leidmine ja puutuja võrrandi koostamine (2 punkti).	**3 punkti**	**Kast 25**

Ülesanne 12. (10 punkti)

Mare keetis putru silindrikujulises potis, mille sisemine läbimõõt oli 24 cm. Poti sisemine kõrgus oli 15 cm.

1. Kas sellesse potti mahub 7 liitrit putru? Põhjendage oma vastust.

2. Pudru segamiseks kasutas Mare 26 cm pikkust lusikat. Kogemata libises lusikas käest ja vajus täiesti pudru sisse. Mitu liitrit putru pidi potis selleks vähemalt olema? Arvutage minimaalne kogus ja esitage täpsusega 0,1 liitrit. Lusika kuju ja paksus jätke arvestamata.

Lahendus	**Teadmised ja oskused / hindamine**	**Punktid**	**Hindamiskast**
 r – raadius h – kõrgus m – moodustaja $S_k = \pi r m$ $V = \pi r^2 h$ 1. $r = 0{,}5HG; r = 12$ (cm) Ruumala arvutamine: $V = \pi \cdot (12)^2 \cdot 15 \approx 6786$ (cm^3) s.o ≈ 6,8 liitrit <u>Vastus.</u> Sellesse potti ei mahu 7 liitrit putru.	Raadiuse leidmine (1 punkt). Ruumala arvutamine (2 punkti). Ühikute teisendamine ja vastus (2 punkti)	**5 punkti**	**Kast 26**
2. Kui lusikas vajus täiesti pudru sisse, siis oli minimaalne kõrgus: $EH = \sqrt{EG^2 - GH^2}$; $EH = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ (cm) Minimaalne pudru kogus on: $V = \pi \cdot (12)^2 \cdot 10 \approx 4524$ (cm^3) s.o 4,6 liitrit <u>Vastus.</u> Minimaalne pudrukogus potis oli 4,6 liitrit.	Ülesande sisu mõistmine (1 punkt). Kõrguse leidmine Pythagorase teoreemi abil (2 punkti). Ruumala arvutamine (1 punkt). Vastuse leidmine (1 punkt).	**5 punkti**	**Kast 27**