KORDAMINE. TÄISNURKSE KOLMNURGA TRIGONOMEETRIA

Kraadimõõt

Geomeetrias ja selle paljudes rakendustes kasutatakse nurga mõõtühikuna **kraadi** (tähis °). Üks kraad (1°) on $\frac{1}{360}$ osa täispöördest ehk $\frac{1}{90}$ osa täisnurgast. Seega on täispöörde suuruseks 360° ja täisnurga suuruseks 90°. Kraadist väiksem mõõtühik on **minut** (tähis ′). Üks minut (1′) on $\frac{1}{60}$ osa ühest kraadist. Veel väiksem nurga mõõtühik on **sekund** (tähis ″), $\frac{1}{60}$ osa minutist. Selline süsteem on kasutusel pärandusena vanast Babüloonia umbes 2000 a eKr, mil arvutamiseks kasutati arvul 60 põhinevat nn **kuuekümnendsüsteemi**.

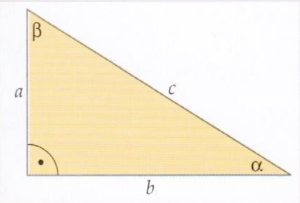
$1° = 60' = 3600''$

Kuna $1° = 60'$ ja $1' = 60''$, siis $1° = 60 \cdot 60'' = 3600''$.

Viimasel ajal kasutatakse minuteid ja sekundeid vähem. Tihti aetakse läbi kraadi murdosadega. Näiteks kasutatakse mitte kuju 46°15′40″, vaid kirjutatakse 43,2611°. Niisugune kirjutusviis hõlbustab ennekõike arvutusi arvutil. Kasutades arvutustes kraade, tuleb jälgida, et arvuti oleks nn kraadirežiimis. Viimane määratakse küll erinevatel arvutitel erinevalt, kuid enamasti on selleks valik DEG või deg [lühend inglise keelest: *degree* – kraad].

Seosed täisnurkse kolmnurga nurkade ning külgede suhete vahel

Põhikoolis on õpitud, et täisnurkse kolmnurga teravnurkade ja külgede suhete vahel kehtivad järgmised seosed (vt kõrvalolevat joonist).



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Saame näidata, et ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse ning tangensi vahel kehtivad seosed

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Kõik need valemid kehtivad ka kolmnurga teise teravnurga β korral, näiteks $\tan\beta = \frac{b}{a}$.

Neid valemeid võib vaadelda ka seostena, funktsioonidena nurga ja külgede vahel. Seepärast kasutame edaspidi siinusest, koosinusest ja tangensist rääkides nende ühise nimetusena ka väljendit *trigonomeetriline funktsioon*. Seoste paremaks meeldejätmiseks on mõistlik püüda neid sõnastada. Näiteks seos siinuse jaoks on sõnastatav järgmiselt:

teravnuga siinus võrdub vastaskaateti ja hüpotenuusi jagatisega.

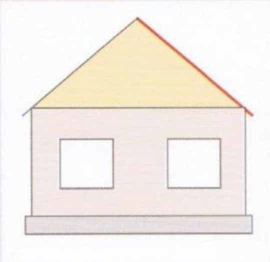
Proovige sõnastada ka ülejäänud valemid.

Ülesannete lahendamisel on hea teada peast mõne teravnurga siinuse, koosinuse ja tangensi täpset väärtust.

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	puudub

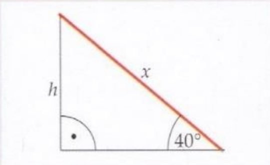
N

Maja viilkatuse kaldenurk maa suhtes on 40°, katuseharja kõrgus maast 6 meetrit, seinte kõrgus 3 meetrit, maja laius 6 meetrit, vundamendi kõrgus 0,5 meetrit. Kui pikk peab olema katuse otsalaud (viilulaud), kui katust toetavad sarikad ulatuvad räästa moodustamiseks oma tugipunktidest seinal veel 0,3 meetri võrra edasi?



Skitseerime maja otsa.

Katuse äärelaua osa harjast kuni katust toetava seinani on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus x. Antud kaldenurk 40° on selle kolmnurga alumine teravnurk. Katuseharja kõrgus h maja otsaseina ülemisest rõhtservast on kaldenurga vastaskaatet. Selle pikkus on $h = 6 - 3 - 0{,}5 = 2{,}5$ m.



Kasutame nurga, kaateti ja hüpotenuusi seostamiseks siinust, $\sin 40° = \frac{h}{x}$. Siit avaldame otsitava $x = \frac{h}{\sin 40°} = 3{,}8893... \approx 3{,}89$ m. Seega peab otsalaua pikkus olema ligikaudu $3{,}89 + 0{,}3 = 4{,}19$ m. Kas oleks olnud võimalik kasutada maja kõrgusmõõtude asemel vaid maja laiust? Kui jah, siis kuidas?

Kui teil oleks vaja ise vahetada mädanenud otsalauda, siis kumba arvutusvõimalust kasutaksite?

Lähtetest

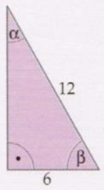
L1. Leidke a) $\sin 55°$, b) $\cos 55°$, c) $\tan 55°$, d) $\sin 90°$.

L2. Leidke nurk α, kui a) $\sin\alpha = 0{,}82$; b) $\cos\alpha = 0{,}57$; c) $\tan\alpha = 1{,}43$; d) $\cos\alpha = 1$.

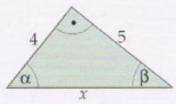
L3. Leidke avaldise täpne väärtus, kui $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.
a) $\sin\alpha + \cos\gamma$, b) $\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}$,
c) $3\tan\beta \cdot \tan\alpha - \sqrt{3}$, d) $\sin^2\beta + \cos^2\gamma$.

L4. Leidke a) $\tan\beta$, kui $\sin\beta = 0{,}6$ ja $\cos\beta = 0{,}2$;
b) $\sin\alpha$, kui $\tan\alpha = 3$ ja $\cos\alpha = 0{,}2$;
c) $\cos^2\alpha$, kui $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;
d) $\cos\alpha$, kui $\tan\alpha = 4$ ja $\sin\alpha = 0{,}8$.

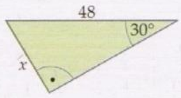
L5. Leidke suurused a) $\sin\alpha$, b) α, c) $\cos\beta$, d) β.



L6. Leidke kolmnurga a) külg x, b) $\tan\beta$, c) nurk β, d) $\tan\alpha$.



L7. Leidke kolmnurga külg x ning pindala S.



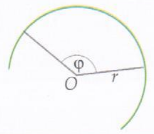
L8. Võrdkülgse kolmnurga küljed on 6 cm. Leidke selle kolmnurga kõrgus, ümbermõõt ja pindala.

L9. Joonisel on kujutatud õhku tõusvat lennukit. Kui kõrgele on lennuk tõusnud?

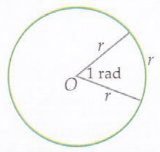
L10. Puuküttega pliidi suurema keeduplaadi raadius on 22,5 cm. Leidke plaadi pindala ja ümbermõõt.

1. NURGA MÕISTE ÜLDISTAMINE

1.1. Radiaanmõõt



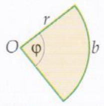
Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis SI (prantsuse keeles *Système International d'Unités**) on nurga mõõtühikuks **radiaan**. Radiaani defineerimiseks kasutatakse kesknurga mõistet. Teatavasti on **kesknurk** ringjoone kahe raadiuse vaheline nurk, mis toetub nende raadiuste vahele jäävale ringjoone kaarele. Joonisel on nurk φ (kreeka tähestiku väiketäht *fii*) kesknurk.



Üks radiaan on kesknurk, mis toetub raadiusepikkusele kaarele.

Radiaani tähiseks on **rad**. Radiaani definitsiooni kohaselt näitab suvalise nurga φ suurus radiaanides seda, mitut raadiust sisaldab endas vastavat kesknurka mõõtev (selle ringjoone) kaar. Seega

$$\varphi = \frac{b}{r}\ \text{rad}.$$



Kuna selles tehtes mõõdetakse kaare pikkust b ja raadiust r pikkusühikutes, näiteks sentimeetrites, siis taandub pikkusühik jagamisel välja ning φ väärtuseks saadakse ühikuta (dimensioonita) suurus. Seepärast jäetakse tähis **rad** tihti kirjutamata. Seega

$$\varphi = \frac{b}{r}.$$

Näiteks kui kaare b pikkus on võrdne kahe raadiusega ($b = 2r$), siis nurk $\varphi = \frac{2r}{r} = 2$ ehk 2 rad.

Otsides seost **kraadimõõdu ja radiaanmõõdu vahel**, paneme tähele, et täispöördega võrdse nurga φ korral ($\varphi = 360°$) on sellele vastavaks kesknurga kaareks b terve ringjoon. Teame, et ringjoone pikkus on $b = 2\pi r$.

Kui asendada need väärtused valemisse $\varphi = \frac{b}{r}$, saame, et $360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Seega $360° = 2\pi$ ja $\pi = 180°$ ehk $180° = \pi$ rad.

$\pi = 180°$

$180° = \pi$ rad

Teadmist, et sirgnurk (180°) on radiaanmõõdus võrdne arvuga π, kasutatakse üleminekuks radiaanmõõdult kraadimõõdule ja vastupidi.

Kui kasutame arvutamisel radiaane, tuleb jälgida, et arvuti oleks nn radiaanirežiimis. Viimane määratakse küll erinevatel arvutitel erinevalt, kuid enamasti on selleks valik RAD või rad.

---

* Eestis on SI ja selle ühikute kasutamine reguleeritud valitsuse määrusega „Kohustuslikud mõõtühikud ja nende kasutusalad" 29.06.1999

N 1

Leidke, mitu kraadi on nurk 1 rad.

Koostame vastavused:

$$\pi \to 180^\circ$$
$$1 \to x$$

Saadud võrdest $\frac{\pi}{1} = \frac{180^\circ}{x}$ leiame $\pi \cdot x = 1 \cdot 180^\circ$.

Siit $x = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}3^\circ$. Seega näeme, et 1 rad $\approx 57^\circ$.

N 2

Merenduses jaotatakse kogu horisont (360°) 32 osaks. Ühte niisugust osa nimetatakse rumbiks. Üks rumb on $\frac{360^\circ}{32} = 11{,}25^\circ$ ehk $11^\circ 15'$. Mitu radiaani on üks rumb?

Koostame vastavused:

$$\pi \to 180^\circ$$
$$x \to 11{,}25^\circ$$

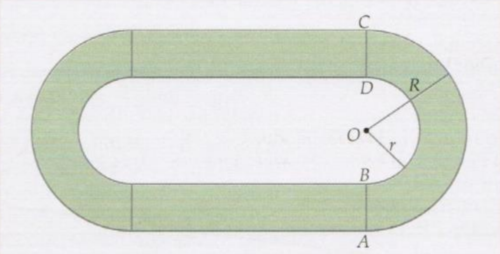
Saadud võrdest leiame $11{,}25^\circ \cdot \pi = 180^\circ \cdot x$. Siit

$$x = \frac{11{,}25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 0{,}0625\pi \text{ ehk hariliku murruna } \frac{625}{10\,000}\pi = \frac{1}{16}\pi = \frac{\pi}{16}.$$

Selle tulemuse oleksime saanud ka lihtsamalt, kui oleksime kasutanud vahetult rumbi definitsiooni. Kuidas?

N 3

Staadionite jooksurajad koosnevad kahest sirgest ja kahest kõverast osast. Võistlejad peavad 400 m ja väiksematel distantsidel jooksma igaüks omal rajal. Ühelt joonelt startides tuleks välimistel radadel jooksvatel võistlejatel läbida sisemistel radadel jooksjatest pikem maa. Selle kompenseerimiseks stardivad välimiste radade jooksjad teistest eespool. Oletame, et sellise raja kaks kõverat osa on kumbki määratud poolringjoontega. Esimese, sisemise jooksuraja kõvera osa raadiuseks olgu 30 meetrit ja välimise raja raadiuseks 36 meetrit. Mitu meetrit siseraja võistlejast eespool peab startima välisrajal jooksja, et ühe ringiga läbitav distants oleks ühepikkune?



Lihtsustades oma lahendust mitmeti (millised neist on eriti olulised?), arvutame kaarte BD ja AC pikkuse. Valemist $\varphi = \frac{b}{r}$ avaldame kaare pikkuse $b = r \cdot \varphi$. Praegu $\varphi = 180^\circ = \pi$. Siis välimine kaar $AC = 36 \cdot \pi \approx 113{,}10$ m ja sisemine kaar $BD \approx 94{,}25$ m.

Jooksuraja kõveratel osadel läbitava teepikkuse erinevus $d = 2 \cdot (AC - BD) \approx 37{,}70$ m.

II lahendusvõimalus

Poolkaared kokku moodustavad terve ringjoone, seega jooksuraja välimine äär on sisemisest äärest pikem

$$2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R - r) =$$
$$= 12\pi \approx 37{,}70 \text{ m}.$$

1.3. Täiendusnurgad

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

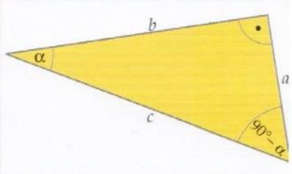
Vaadeldes lähemalt mõne nurga siinuste ja koosinuste tabelit, mis meile juba tuttav on, paneme tähele, et

$$\sin 30° = \cos 60°, \quad \sin 60° = \cos 30°, \quad \sin 0° = \cos 90°,$$
$$\sin 90° = \cos 0° \quad \text{ja} \quad \sin 45° = \cos 45°.$$

Kõigis nendes võrduste paarides olevate nurkade summa $30° + 60°$, $0° + 90°$ ja $45° + 45°$ on aga $90°$, st võrdne täisnurgaga.

Kahte nurka, mille summa on 90°, nimetatakse teineteise **täiendusnurkadeks**.

Täiendusnurkadeks on näiteks nurgapaarid 10° ja 80°, 30° ja 60°, 75° ja 15° jne. Kuna täisnurkse kolmnurga kahe teravnurga summa on alati 90° (miks?), siis on need teineteise täiendusnurkadeks. Kui üks neist on α, siis teine on $90° - \alpha$.



Selles täisnurkses kolmnurgas kehtivad järgmised seosed.

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$

   Kuna nende võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka vasakud pooled. Seega
   $$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha).$$
   Valemi paremaks meelespidamiseks sõnastame selle järgmiselt.

Teravnurga siinus võrdub tema täiendusnurga koosinusega.

2. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ ja $\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$

   Analoogiliselt eelmise võrdusega saame, et
   $$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Teravnurga koosinus võrdub tema täiendusnurga siinusega.

3. $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ ja $\tan(90° - \alpha) = \frac{b}{a}$

   Kuna nende võrduste paremad pooled on teineteise pöördarvud, siis ka vasakud pooled on pöördarvud. Seega
   $$\tan\alpha = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}.$$

Teravnurga tangens võrdub tema täiendusnurga tangensi pöördväärtusega.

N

1) $\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30° = 0{,}5$
2) $\sin 40° = \cos(90° - 40°) = \cos 50° \approx 0{,}64$
3) $\tan 60° = \frac{1}{\tan(90° - 60°)} = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$

Ülesanded

10. Missuguse nurga koosinus on sama suur kui
1) $\sin 10°$; 2) $\sin 0{,}5°$; 3) $\sin 78°$; 4) $\sin 0°$; 5) $\sin 90°$; 6) $\sin 45°$; 7) $\sin\frac{\pi}{3}$; 8) $\sin\frac{\pi}{4}$?

11. Missuguse nurga siinus on sama suur kui

1) $\cos 30°$; 2) $\cos 85°$; 3) $\cos 90°$; 4) $\cos 20{,}5°$;

5) $\cos 0°$; 6) $\cos 45°30'$; 7) $\cos\frac{\pi}{6}$; 8) $\cos\frac{\pi}{2}$?

12. Taskuarvutiga leiti, et $\sin 50° \approx 0{,}77$ ja $\cos 50° \approx 0{,}64$.
Leidke neid väärtusi kasutades 1) $\cos 40°$, 2) $\sin 40°$, 3) $\tan 40°$.

13. Lisaks nurga siinusele, koosinusele ja tangensile kasutatakse ka nurga **kootangensit**, $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Arvutage

1) $\cot 50°$, kui $\tan 40° \approx 0{,}84$;

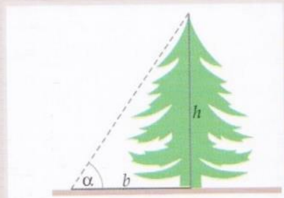
2) $\cot 10°$, kui $\sin 10° \approx 0{,}174$ ja $\cos 10° \approx 0{,}985$;

3) $\tan 70°$, kui $\cot 20° \approx 2{,}75$.

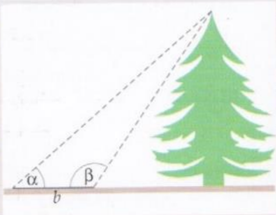
14. Missuguse nurga siinus on sama suur kui

1) $\cos\frac{\pi}{3}$, 2) $\cos\frac{\pi}{5}$, 3) $\cos\frac{\pi}{8}$, 4) $\cos\frac{\pi}{2}$, 5) $\cos\frac{\pi}{4}$, 6) $\cos\frac{\pi}{6}$?

1.4. Positiivsed ja negatiivsed nurgad



Põhikooli trigonomeetriateadmiste, mõõdulindi ja nurgamõõtja (teodoliidi) abil oskame arvutada mingi objekti, näiteks puu kõrgust selle otsa ronimata. Selleks märgistame ja mõõdame maapinnal ära mingi vahemaa b, nn baasi. Nurgamõõtjaga mõõdame ära nurga α. Teades, et $\tan\alpha=\frac{h}{b}$, saame arvutada puu kõrguse $h=b\tan\alpha$. Leidke see kõrgus, kui $b=10$ m ja $\alpha=30°$. (Vastuseks peab tulema ligikaudu 5,8 m.)



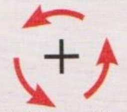
Keerulisem on olukord siis, kui objekt, mille kõrgust määratakse, pole ligipääsetav. Näiteks on tegemist mingi kaitsealuse linnu pesapuuga, millele lähenemine ei ole soovitatav. Sel juhul peame baasi moodustama puust kaugemal ning mõõtma ära nurgad α ja β. Paraku pole arvutuste aluseks olev kolmnurk nüüd enam täisnurkne ja meile varasemast teada olevad seosed siin enam ei kehti.

Sellest olukorrast väljatulemiseks peame oma trigonomeetriateadmisi laiendama.

Kõigepealt vaatleme kiire pöörlemisel tekkiva nurga „suunda".

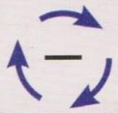
Matemaatikas on kokku lepitud, et

pööret kellaosuti liikumissuunale vastupidises suunas nimetatakse **positiivseks pöördeks**,

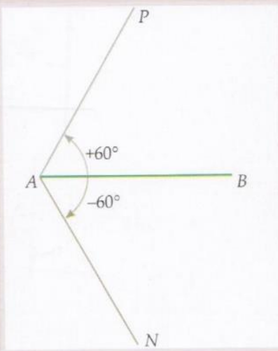


Positiivne pööre

pööret kellaosutiga samas suunas aga **negatiivseks pöördeks**.



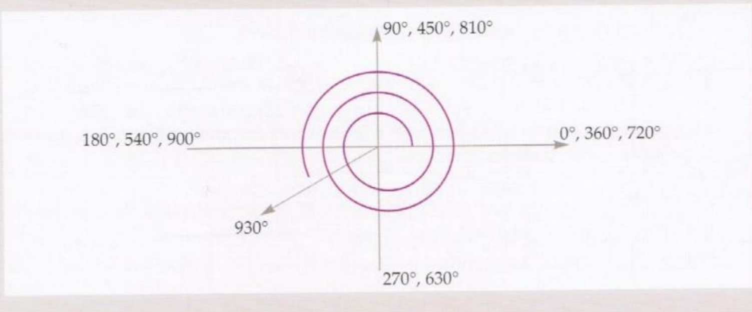
Negatiivne pööre

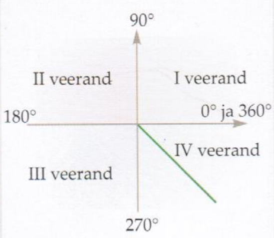


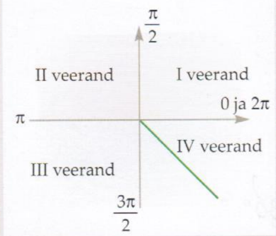
Pöörates kiirt AB 60° võrra positiivses suunas, liigub see asendisse AP. Sama suur negatiivne pööre viib selle kiire asendisse AN.

Kiire esialgset asendit AB nimetatakse pöördenurga BAP (samuti ka nurga BAN) **alghaaraks**, lõppasendit AP (ja AN) aga **lõpphaaraks**.

Pööre võib olla ka suurem kui täispööre (360° ehk 2π) või koguni kui tahes suur. Näiteks kui kiire alguspunkt on koordinaattelgede alguses ja esialgne asend abstsisstelje (x-telje) positiivsel osal, siis positiivse pöörde 930° läbi teinud kiir, pöördenurga lõpphaar, asetseb koordinaattasandi III veerandis. Sellesse asendisse jõudmiseks pöördus kiir kahe täispöörde $2\cdot360°=720°$ võrra ning lisaks veel $930°-720°=210°$. Kui suur oleks pidanud olema näiteks vastav negatiivne pööre, et lõpphaar oleks jõudnud samasse asendisse? (Õige on üks järgmistest vastustest: −930°, −900°, −870°.)







Nurga lõpphaara asendi järgi koordinaattasandil liigitatakse nurgad

1) esimese veerandi nurkadeks,
2) teise veerandi nurkadeks,
3) kolmanda veerandi nurkadeks,
4) neljanda veerandi nurkadeks.

Koordinaattasandil asetsev lõpphaar kujutab alati kahte kuni täispöörde suurust nurka. Üks neist on positiivse, teine negatiivse pöörde tulemus. Näiteks kujutab IV veerandi nurgapoolitajaks olev lõpphaar nii nurka $-45°$ kui ka nurka $315°$. Millist neist kasutada, sõltub käsitletavast probleemist ja õppija või uurija maitsest.

Kuna nurga lõpphaar jääb pärast igat täispööret ühte ja samasse asendisse, siis võib üks nähtav lõpphaar kujutada üksteisest 360° võrra erinevaid nurki. Näiteks kujutab joonisel toodud lõpphaar nii nurka $\varphi_1 = 315°$ kui ka nurka $\varphi_2 = 315° + 1 \cdot 360° = 675°$ või nurka $\varphi_3 = 315° + 2 \cdot 360° = 1035°$ jne.

Sellesama lõpphaaraga määratud negatiivne nurk võib olla nii nurk $\beta_1 = -45°$ kui ka

$$\beta_2 = -45° + (-360°) = -45° - 1 \cdot 360° = -405° \text{ või}$$

$$\beta_3 = -45° + 2 \cdot (-360°) = -45° - 2 \cdot 360° = -765° \text{ või}$$

$$\beta_4 = -45° + 3 \cdot (-360°) = -45° - 3 \cdot 360° = -1125° \text{ jne.}$$

Et vähendada viimastes avaldistes negatiivsete nurkade kasutamist, teisendame neid nii, et nende esimene liige muutub positiivseks. Kuna alati võib kirjutada, et $-45° = 315° - 360°$, siis asendame kõigis eelnevates negatiivsete nurkade avaldistes esimese liikme selle avaldisega. Siis saame

$$\beta_1 = 315° - 360° = 315° - 1 \cdot 360°,$$

$$\beta_2 = (315° - 360°) - 1 \cdot 360° = 315 - 360° - 1 \cdot 360° = 315° - 2 \cdot 360°,$$

$$\beta_3 = (315° - 360°) + 2 \cdot (-360°) = 315° - 360° - 2 \cdot 360° = 315° - 3 \cdot 360°,$$

$$\beta_4 = 315° - 4 \cdot 360° \text{ jne.}$$

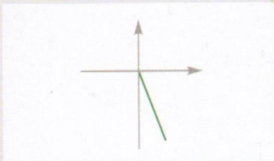
Eelmises lõigus kirjeldatud nurkade järjendeid vaadates on kerge märgata, et **üks ja sama lõpphaar võib kujutada erinevaid nurki x, kusjuures see erinevus on alati mingi täisarvu k kordne 360°-st:** $k \cdot 360°$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Seega võime kirjutada, et

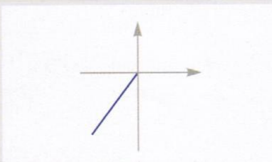
$$x = \alpha + k \cdot 360°, \text{ kus } 0° \leqslant \alpha < 360° \text{ ja } k \in \mathbf{Z}.$$

Radiaanmõõdus

$$x = \alpha + k \cdot 2\pi = \alpha + 2\pi k, \text{ kus } 0 \leqslant \alpha < 2\pi \text{ ja } k \in \mathbf{Z}.$$

N





1. Esitame nurga 1000° viimati näidatud kujul ja kujutame seda koordinaattasandil. Määrame nurgas sisalduvate täispöörete arvu: $1000 : 360 = 2$, jääk 280. Täispöörete arv on $k = 2$ ja jääk on nurk $\alpha = 280°$. Seega võime kirjutada:

   $$1000° = 280° + 2 \cdot 360°.$$

   Joonisel jääb selle nurga lõpphaar IV veerandisse.

2. Esitame nurga $-850°$ eelnevalt vaadeldud kujul. Täispöörete arv $850 : 360 = 2$, jääk 130. Seega $-850° = -130° + (-2 \cdot 360°) = -130° - 2 \cdot 360°$. Asendame nüüd esimese negatiivse liidetava, $-130°$, positiivse arvuga. Selleks liidame talle $+360°$ ning selleks, et võrdus jääks kehtima, lisame summale omakorda ühe negatiivse täispöörde, $-360°$. Saame

   $$-850° = -130° \underline{+ 360°} - 2 \cdot 360° \underline{- 360°}.$$

   Siit $-850° = 230° + (-3 \cdot 360°) = 230° - 3 \cdot 360°$.
   Nurga lõpphaar jääb kolmandase veerandisse.

3. Esitame nurga 7π eelnevalt vaadeldud kujul. Täispöörete arv $7:2=3$, jääk 1. Seega $7\pi = 1\cdot\pi + 3\cdot 2\pi = \pi + 3\cdot 2\pi$. Kus asub selle nurga lõpphaar? (Üks vastustest on õige: y-telje positiivsel osal, x-telje negatiivsel osa, x-telje positiivsel osal.)

Ülesanded

15. Millises suunas
    1) pöörleb kella sekundiosuti;
    2) on nummerdatud koordinaatveerandid;
    3) tuleb mutrit kinni keerata;
    4) tuleb nn vasakkeermega mutrit lahti keerata;
    5) tuleb keeratavat veekraani avada?

16. Millises suunas pöörlevad joonisel näidatud hammasrataste süsteemis
    1) II ja III ratas, kui I ratas pöörleb positiivses suunas;
    2) I ratas, kui II ratas pöörleb negatiivses suunas;
    3) I ja II ratas, kui III ratas pöörleb negatiivses suunas?

    Kas on võimalik, et süsteem töötab, kui I ratas pöörleb positiivses suunas ja III ratas negatiivses suunas?

    Missugused rataste pöörlemissuunad purustavad süsteemi?

17. Millise veerandi nurk on
    1) $149°$; 2) $1100°$; 3) $680°$; 4) $-680°$; 5) $-235°$; 6) $2008°$; 7) $1946°$; 8) $-1953°$; 9) $0{,}9\pi$; 10) $-7{,}8\pi$?

18. Skitseerige koordinaattasandil nurk.
    1) $45°$, 2) $135°$, 3) $-60°$, 4) $150°$, 5) $225°$, 6) $300°$, 7) $-300°$, 8) $180°$, 9) $270°$, 10) $945°$, 11) $\frac{3\pi}{4}$, 12) $\frac{5\pi}{4}$, 13) $-\frac{4\pi}{3}$, 14) $\frac{3\pi}{2}$.

19. Kui suure nurga võrra pöördub kuuekandiline mutter, kui seda keerata ühe kandi võrra?

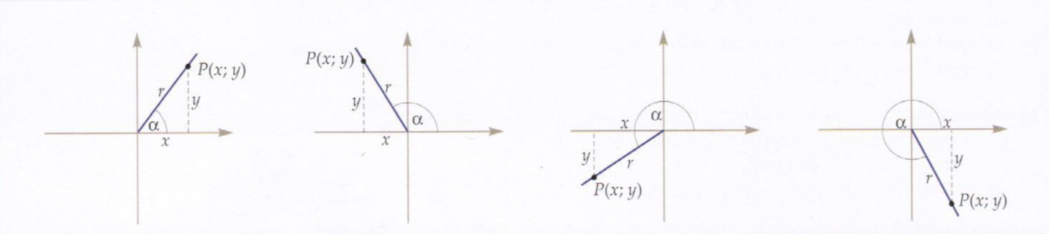
20. Autoratas seisab, ventiil allapoole. Missugusesse asendisse jõuab ventiil, kui keerata ratast kolm ja pool pööret positiivses suunas; kui keerata sama palju negatiivses suunas?

21. Teisendage nurk kujule $\alpha + k\cdot 360°$, kus $0° \leqslant \alpha < 360°$ ja $k \in \mathbf{Z}$, või $x = \alpha + k\cdot 2\pi = \alpha + 2\pi k$, kus $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ ja $k \in \mathbf{Z}$, ning määrake, missuguse veerandi nurk see on ja mitme täispöörde järel on lõpphaar sellesse asendisse jõudnud.
    1) $390°$, 2) $1979°$, 3) $-750°$, 4) $2009°$, 5) $-690°$, 6) $720°$, 7) 25π, 8) -51π, 9) $\frac{19\pi}{4}$, 10) $\frac{11\pi}{2}$.

2. MIS TAHES NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

2.1. Nurga siinuse, koosinuse ja tangensi määratlused

Joonestame koordinaatteljestikku suvalise positiivse nurga α, mille tipp on koordinaatide alguses ja alghaar x-telje (abstsisstelje) positiivsel osal. Märgime selle lõpphaarale punkti $P(x; y)$, mis asetseb koordinaatide algusest r ühiku kaugusel. See nurk võib jääda nii esimesse, teise, kolmandasse kui ka neljandasse veerandisse. Seetõttu saame neli joonist.



On ilmne ja saab ka tõestada, et suhted $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ ja $\frac{x}{y}$ ei sõltu sellest, missugusesse veerandisse jääb ja kui kaugel on punkt $P(x; y)$ koordinaatide algusest. Seda asjaolu kasutades saame defineerida suvalise nurga siinuse, koosinuse ja tangensi.

Nurga α **siinuseks** nimetatakse nurga lõpphaara suvalise punkti $P(x; y)$ ordinaadi y suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist r.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Nurga α **koosinuseks** nimetatakse nurga lõpphaara suvalise punkti $P(x; y)$ abstsissi x suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist r.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Nurga α **tangensiks** nimetatakse nurga lõpphaara suvalise punkti $P(x; y)$ ordinaadi y ja abstsissi x suhet.

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Tangensi juures on oluline silmas pidada järgmist. Kui $x = 0$, siis murrul $\frac{y}{x}$ puudub väärtus, nulliga jagada ei saa. Vastavate nurkade α jaoks ei saa tangensit arvutada, see puudub. Miks niisugust probleemi ei teki siinuse ja koosinuse korral?

Uurime täpsemalt, missuguste nurkade korral tangens puudub. Lõpphaarad punktiga P, mille abstsiss $x = 0$, asuvad y-teljel. Seega on niisuguste lõpphaaradega määratud nurkade suurused kas $90° = 1 \cdot 90°$, $270° = 3 \cdot 90°$ või nendest täispöörete (360°) lisamisel tekkivad suurused. Ühe täispöörde lisamisel tekivad nurgad $90° + 1 \cdot 360°$ ja

$3\cdot 90°+1\cdot 360°$, kahe täispöörde lisamisel nurgad $90°+2\cdot 360°$ ja $3\cdot 90°+2\cdot 360°$ jne. Teisendame neid avaldisi, viies $90°$ sulgude taha. Saame

$$\begin{gathered}1\cdot 90°,\\ 3\cdot 90°,\\ 90°+1\cdot 360°=(1+4)\cdot 90°=5\cdot 90°,\\ 3\cdot 90°+1\cdot 360°=(3+1\cdot 4)\cdot 90°=7\cdot 90°,\\ 90°+2\cdot 360°=(1+2\cdot 4)\cdot 90°=9\cdot 90°,\\ 3\cdot 90°+2\cdot 360°=(3+2\cdot 4)\cdot 90°=11\cdot 90° \text{ jne.}\end{gathered}$$

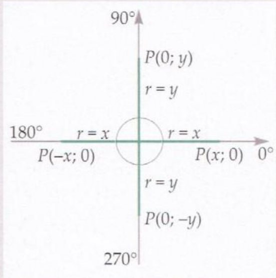
Näeme, et tangens puudub nurkadel, mis on täisnurga (90°) **paarituarvulised** (1, 3, 5, 7, 9, 11 jne) kordsed. Teame, et paaritu arvu üldkuju on $(2k+1)$, kus $k\in\mathbf{Z}$. Järelikult

$$\tan\alpha \textbf{ väärtus puudub}, \text{ kui } \alpha=(2k+1)\cdot 90°,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Radiaanmõõdus antud nurkade korral on sellel avaldisel kuju

$$\alpha=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Leiame nüüd trigonomeetriliste funktsioonide väärtused nurkade jaoks, mille **lõpphaar asetseb koordinaatteljel**. Need on nurgad 0°, 90°, 180°, 270° ja 360°. Kuna täispöörde võrra erinevatel nurkadel on lõpphaar samas asendis, siis on nurga 0° siinus, koosinus ja tangens võrdsed nurga 360° siinuse, koosinuse ja tangensiga. Eelnevalt leidsime, et y-teljel paiknevate lõpphaaraga nurkade (nurkade 90° ja 270°) tangens puudub.



- **Nurk 0°** on määratud x-telje positiivsel osal oleva lõpphaaraga. Võtame lõpphaaral mingi punkti $P(x;y)$. Selle koordinaadid on $(x;0)$ ja kaugus koordinaatide algusest on $r=x$. Kasutades trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone, leiame

$$\sin 0°=\frac{y}{r}=\frac{0}{x}=0,\quad \cos 0°=\frac{x}{r}=\frac{x}{x}=1,\quad \tan 0°=\frac{y}{x}=\frac{0}{x}=0.$$

- **Nurk 90°** on määratud y-telje positiivsel osal oleva lõpphaaraga. Võtame lõpphaaral mingi punkti $P(x;y)$. Selle koordinaadid on $(0;y)$ ja kaugus koordinaatide algusest on $r=y$. Saame

$$\sin 90°=\frac{y}{r}=\frac{y}{y}=1,\quad \cos 90°=\frac{x}{r}=\frac{0}{y}=0,\quad \text{tangensi väärtus puudub.}$$

- **Nurk 180°** on määratud x-telje negatiivsel osal oleva lõpphaaraga. Võtame lõpphaaral mingi punkti $P(x;y)$. Selle koordinaadid on $(-x;0)$ ja kaugus koordinaatide algusest on $r=x$. Saame

$$\sin 180°=\frac{y}{r}=\frac{0}{x}=0,\quad \cos 180°=\frac{x}{r}=\frac{-x}{x}=-1,\quad \tan 180°=\frac{y}{x}=\frac{0}{-x}=0.$$

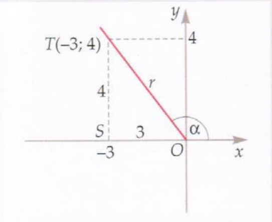
- **Nurk 270°** on määratud y-telje negatiivsel osal oleva lõpphaaraga. Võtame lõpphaaral mingi punkti $P(x;y)$. Selle koordinaadid on $(0;-y)$ ja kaugus koordinaatide algusest on $r=y$. Saame

$$\sin 270°=\frac{y}{r}=\frac{-y}{y}=-1,\quad \cos 270°=\frac{x}{r}=\frac{0}{y}=0,\quad \text{tangensi väärtus puudub.}$$

Koondame saadud väärtused tabelisse.

Nurk α (°, rad)	0° ehk 0 ja 360° ehk 2π	90° ehk $\frac{\pi}{2}$	180° ehk π	270° ehk $\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	0	−1	0
$\tan\alpha$	0	puudub	0	puudub

N Olgu mingi punkt nurga lõpphaaral $T(-3;4)$. Leiame selle lõpphaaraga määratud nurga siinuse, koosinuse ja tangensi.



Arvutame Pythagorase teoreemi abil punkti T kauguse r koordinaatide algusest. Täisnurkse abikolmnurga OST hüpotenuusiks on r ja kaatetite pikkused on 3 ja 4.

Seega $r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, siit $r = \sqrt{25} = 5$.

Vastavalt siinuse definitsioonile $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ saame $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Analoogiliselt

$$\cos\alpha = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \quad \text{ja} \quad \tan\alpha = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Kontrollimiseks kasutame õpitud seost $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Kui asendame selle võrduse vasakus pooles siinuse ja koosinuse leitud väärtustega ja teeme tehted, saame

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1.$$

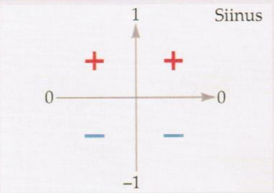
See on võrdne parema poolega, seega on lootust, et oleme siinuse ja koosinuse leidnud õigesti.

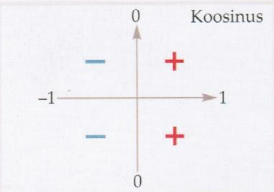
Leitud tangensi õigsuse kontrollimiseks kasutame seost $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Asendame selle võrduse paremas pooles siinuse ja koosinuse leitud väärtustega, saame

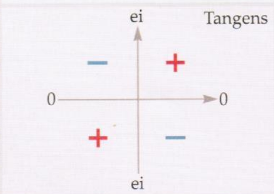
$$\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = -\frac{4}{3}.$$

See on võrdne meie arvutatud tangensi väärtusega, võrduse vasaku poolega. Ka tangens on leitud õigesti.

Näites nägime, et teises veerandis asuva nurga korral oli selle siinus positiivne, koosinus ja tangens aga negatiivsed. Uurime nüüd, **missugused on mingi nurga α siinuse, koosinuse ja tangensi väärtused koordinaatveerandites.** Kõik nimetatud suurused määratakse teatavasti lõpphaara mingi punkti $P(x;y)$ koordinaate x, y ja selle punkti kaugust nullpunktist r sisaldavate murdudega. Kuna r kui kaugus on alati mittenegatiivne ($r \geqslant 0$), siis sõltuvad nende murdude märgid vaid koordinaatide x ja y märkidest. See omakorda sõltub aga veerandist, kus asub punkt P ja seega ka nurk. Järelikult, kasutades murru kui jagatise märgireegleid, võime kirjutada, et







- I veerandis, kus $x > 0$ ja $y > 0$, on

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} > 0, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} > 0, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} > 0;$$

- II veerandis, kus $x < 0$ ja $y > 0$, on

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} > 0, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} < 0, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} < 0;$$

- III veerandis, kus $x < 0$ ja $y < 0$, on

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} < 0, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} < 0, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} > 0;$$

- IV veerandis, kus $x > 0$ ja $y < 0$, on

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} < 0, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} > 0, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} < 0.$$

Ülesanded

22. Leidke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ ning kontrollige tulemust, kui nurga α lõpphaaral on punkt

1) $K(5;12)$, 2) $M(4;-3)$, 3) $L(-1;-1)$, 4) $F(1;\sqrt{3})$, 5) $G(0;1)$.

23. Kasutades siinuse, koosinuse ja tangensi definitsiooni, leidke

1) $\sin 0°$, 2) $\cos 0°$, 3) $\tan 0°$, 4) $\sin 90°$, 5) $\cos 90°$, 6) $\tan 90°$, 7) $\cos 180°$, 8) $\sin 180°$, 9) $\sin 270°$.

24. Määrake nurga siinuse, koosinuse ja tangensi märk.

1) $150°$, 2) $-60°$, 3) $240°$, 4) $-110°$, 5) $300°$, 6) $-200°$, 7) $60°$, 8) $225°$, 9) $-225°$, 10) $-300°$, 11) $\frac{\pi}{4}$, 12) $\frac{3\pi}{4}$, 13) $\frac{7\pi}{5}$, 14) $-\frac{5\pi}{6}$, 15) $-\frac{7\pi}{4}$.

Ülesanded

22. Leidke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ ning kontrollige tulemust, kui nurga α lõpphaaral on punkt

1) $K(5;12)$, 2) $M(4;-3)$, 3) $L(-1;-1)$, 4) $F(1;\sqrt{3})$, 5) $G(0;1)$.

23. Kasutades siinuse, koosinuse ja tangensi definitsiooni, leidke

1) $\sin 0°$, 2) $\cos 0°$, 3) $\tan 0°$, 4) $\sin 90°$, 5) $\cos 90°$, 6) $\tan 90°$, 7) $\cos 180°$, 8) $\sin 180°$, 9) $\sin 270°$.

24. Määrake nurga siinuse, koosinuse ja tangensi märk.

1) $150°$, 2) $-60°$, 3) $240°$, 4) $-110°$, 5) $300°$, 6) $-200°$, 7) $60°$, 8) $225°$, 9) $-225°$, 10) $-300°$, 11) $\frac{\pi}{4}$, 12) $\frac{3\pi}{4}$, 13) $\frac{7\pi}{5}$, 14) $-\frac{5\pi}{6}$, 15) $-\frac{7\pi}{4}$.

2.3. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamisest

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan(90° - \alpha)}$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan\alpha$

Ülesannete lahendamise käigus tekivad mõnikord avaldised, mis sisaldavad kas erinevaid trigonomeetrilisi funktsioone või erinevate nurkade trigonomeetrilisi funktsioone. Niisuguseid avaldisi on võimaluse korral mõistlik lihtsustada. Selleks kasutatakse nii algebraliste avaldiste lihtsustamise võtteid kui ka seoseid erinevate trigonomeetriliste funktsioonide vahel. Võtame neist meile teadaolevad veel kord kokku.

Ülesanded

27. Lihtsustage avaldis.

1) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha - \sin\alpha$
2) $\sin\varphi \cdot \tan\varphi + \cos\varphi$
3) $1 + \tan^2\beta - \dfrac{1}{\cos^2\beta}$
4) $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}$
5) $\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x$
6) $\left(1 + \tan^2\alpha\right)\cos^2\alpha + 4\sin 30°$
7) $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$
8) $\dfrac{1}{\tan^2 20° \cdot \left(\tan^2 70° + 1\right)}$
9) $\dfrac{1}{\sin^2\varphi} - \dfrac{1}{\tan^2\varphi}$
10) $\sin(x + 2\pi)\sin(-x) - \cos(x + 6\pi)\cos(-x)$
11) $4\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + 4$
12) $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$
13) $\dfrac{1}{\tan\beta + \tan(90° - \beta)} - \sin\beta\cos\beta$
14) $1 - \sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
15) $\dfrac{(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\alpha + 1)^2}{2 - \cos^2\alpha}$