

Tehted harilike murdudega



Hariliku murru mõiste

Harilikuks murruks nimetatakse kahe naturaalarvu a ja b jagatist kujul

$$\frac{a}{b},$$

kus $b \neq 0$.

Harilik murd:

$$\frac{a}{b}$$

← murru lugeja

← murrujoon

← murru nimetaja

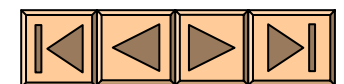
Murrujoonel on jagamismärgi tähendus. Horisontaaljoone asemel kasutatakse murrujoonena ka kaldkriipsu.

Näited

$$\frac{1}{2} = 1/2 = 1:2 = 0,5$$

$$\frac{7}{3} = 7/3 = 7:3 = 2,333\dots = 2,(3)$$

Loe: “kaks koma kolm perioodis”



Liht- ja liigmurd

Kui murru nimetaja on suurem lugejast ($b > a$, ehk $a / b < 1$), siis nimetame murdu *lihtmurruks*, vastupidisel ($b \leq a$, ehk $a / b \geq 1$) juhul *liigmurruks*.

Näited

Lihtmurrud: $\frac{5}{13}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{16}$.

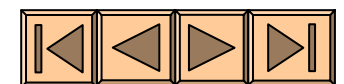
Liigmurrud: $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{100}{12}$, $\frac{1}{1}$.

Iga liigmurru saab teisendada *segaarvuks*, teostades jäägiga jagamise tehte lugeja ja nimetaja vahel. Täisarvuline jagatis on segaarvu täisosa, jääk on murdosa lugeja.

Näide Teisendame liigmurru $\frac{63}{12}$ segamurruks.

Lahendus $63 : 12 = 5$, jääk 3.

Seega $\frac{63}{12} = 5 + \frac{3}{12} = 5\frac{3}{12}$



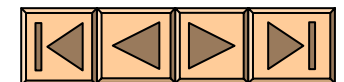
Ühe- ja erinimelised murrud

Murde nimetatakse *ühenimelisteks*, kui nendel on ühesugused nimetajad, vastasel korral *ise-* ehk *erinimelisteks*.

Näited

Murrud $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$ on ühenimelised.

Murrud $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ on isenimelised (erinimelised).



Segaarvu teisendamine liigmurruks

Segaarvu teisendamisel liigmurruks tuleb segamurru täisosa korrutada nimetajaga ja tulemus liita murdosa lugejale. Saadud tulemus on liigmurru lugejaks.

Näited

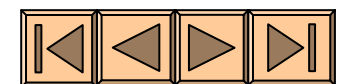
$$1) \quad 7\frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{89}{12}$$

$$2) \quad -3\frac{2}{7} = -\frac{3 \cdot 7 + 2}{7} = -\frac{23}{7}$$

Ka iga täisarv on liigmurd.

Näiteks

$$4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = \dots$$



Hariliku murru põhiomadus

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Seda omadust kasutatakse:

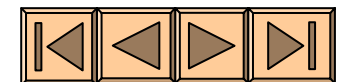
a) *murru taandamisel* (murru lugeja ja nimetaja jagamisel ühe ja sama nullist erineva arvuga):

näiteks $\frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ (jagasime lugeja ja nimetaja 2-ga);

$\frac{\cancel{2}6}{\cancel{9}3} = \frac{2}{3}$ (jagasime lugeja ja nimetaja 3-ga);

b) *murru laiendamisel* (murru lugeja ja nimetaja korrutamisel ühe ja sama nullist erineva arvuga):

näiteks $\frac{8}{15} = \frac{40}{75}$ (korrutasime lugeja ja nimetaja 5-ga).



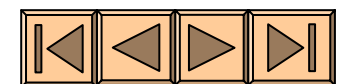
Murdude korrutamine

Murdude korrutiseks on murd, mille lugejaks on tegurite lugejate korrutis, ning nimetajaks tegurite nimetajate korrutis.

Näited

1) $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{12}_4 \cdot 4} = \frac{5}{16}$.

2) $2\frac{1}{5} \cdot \left(7\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{5} \cdot \frac{23}{3} = \frac{11 \cdot 23}{5 \cdot 3} = \frac{253}{15} = 16\frac{13}{15}$.



Murdude jagamine

Murdude jagatiseks on murd, mille lugejaks on jagatava lugeja ja jagaja nimetaja korrutis, ning nimetajaks jagatava nimetaja ja jagaja lugeja korrutis.

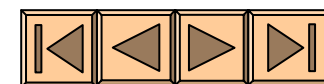
Näited

$$1) \quad \frac{5}{12} : \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{12}_4 \cdot 4} = \frac{5}{16}.$$

$$2) \quad 2\frac{1}{5} : \left(7\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{5} : \frac{23}{3} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 23} = \frac{33}{115}.$$

$$3) \quad 4\frac{1}{2} : 2 = \frac{9}{2} : \frac{2}{1} = \frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

$$4) \quad 6 : \frac{2}{3} = \frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{\cancel{6}^3 \cdot 3}{1 \cdot \cancel{2}_1} = \frac{9}{1} = 9.$$



Murdude korrutamine ja jagamine

Kui ülesandes on järjestikku mitu korrutamist ja/või jagamist, siis tuleb tehted sooritada vasakult paremale kirjepandud järjekorras või kõik korruga ühisel murrujoonel.

Näide $\frac{6}{7} : 2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{45}{98}$.

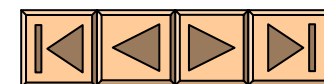
1. lahendus

a) $\frac{6}{7} : 2\frac{1}{3} = \frac{6}{7} : \frac{7}{3} = \frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{18}{49}$;

b) $\frac{18}{49} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{18}{49} \cdot \frac{5}{4} = \frac{18 \cdot 5}{49 \cdot 4} = \frac{18 \cdot 5}{49 \cdot 4} = \frac{18 \cdot 5}{49 \cdot 4} = \frac{45}{98}$.

2. lahendus

$$\frac{6}{7} : 2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{6}{7} : \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{45}{98}$$



Ühenimeliste murdude liitmine-lahutamine

Ühenimeliste murdude liitmisel (lahutamisel) liidetakse (lahutatakse) lugejad ühisel murrujoonel. Nimetajaks jääb ühine nimetaja.

Näited 1) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{3+7}{10} = \frac{10}{10} = 1.$

2) $2\frac{4}{9} - 1\frac{8}{9} = \frac{22}{9} - \frac{17}{9} = \frac{22-17}{9} = \frac{5}{9}.$

Liitmisel ja lahutamisel ei saa taandada ühisel murrujoonel enne kui liitmis-lahutamistehted on sooritatud.

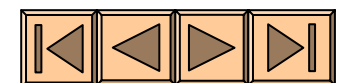
Näide

$$\frac{11}{12} - \frac{1}{12} - \frac{7}{12} = \frac{11-1-7}{12} = \frac{5}{\cancel{12}_6} - 7 = \frac{10-7}{6}$$

← Väär taandamine

Õige on:

$$\frac{11}{12} - \frac{1}{12} - \frac{7}{12} = \frac{11-1-7}{12} = \frac{1}{\cancel{12}_4} = \frac{1}{4}.$$



Isenimeliste murdude liitmine-lahutamine

Isenimeliste murdude liitmisel (lahutamisel) tuleb murrud enne tehte sooritamist laiendada ühenimelisteks.

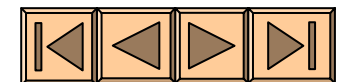
Näited

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{b) } \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9}{24} - \frac{2}{24} = \frac{9-2}{24} = \frac{7}{24}.$$

Murdude *ühiseks nimetajaks* valitakse vähim selline arv, mis jagub iga liidetava (vähendatava ja vähendaja) murru nimetajaga (nimetajate vähim ühiskordne). Näites a) on ühiseks nimetajaks arv 6, näites b) – arv 24.

Ühise nimetaja jagamisel iga murru nimetajaga saadakse *laiendajad*, millega laiendatakse iga murd eraldi. Näites a) laiendati esimest murdu kahega, teist kolmega. Näites b) olid murdude laiendajateks 3 ja 2.



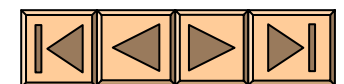
Segaarvude liitmine ja lahutamine

Segaarvude liitmisel (lahutamisel) liidetakse (lahutatakse) eraldi täisosad ja murdosad ja tulemused liidetakse. Kui lahutamisel vähendataval murdosa puudub või see on väiksem vähendaja murdosast, siis võetakse täisosast üks üheline ning teisendatakse see vähendatava murdosaks, saades viimase murdosa liigmurruna.

Näited

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2} &= (1+3) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 4 + \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}\right) = 4 + \frac{4+3}{6} = 4 + \frac{7}{6} = \\ &= 4 + 1\frac{1}{6} = 5\frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 7\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4} &= (7-2) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) = 5 + \left(\frac{4}{12} - \frac{9}{12}\right) = 4 + \left(\frac{16}{12} - \frac{9}{12}\right) \\ &= 4 + \frac{7}{12} = 4\frac{7}{12}. \end{aligned}$$



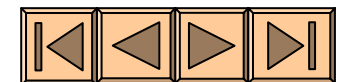
Segaarvude liitmine ja lahutamine (II)

Kui ülesandes on vaja lahutada väiksemast arvust suurem, siis teostatakse lahutamine vastupidises järjekorras ja tulemuse ette kirjutatakse miinusmärk:

Näited

$$\text{a) } 8 - 11\frac{8}{9} = -\left(11\frac{8}{9} - 8\right) = -3\frac{8}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\frac{3}{5} - 7\frac{1}{3} &= -\left(7\frac{1}{3} - 2\frac{3}{5}\right) = -\left[(7 - 2) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right)\right] = \\ &= -\left[4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)\right] = -\left[4 + \left(\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3}\right)\right] = -\left[4 + \frac{20 - 9}{15}\right] = \\ &= -\left[4 + \frac{11}{15}\right] = -4\frac{11}{15}. \end{aligned}$$

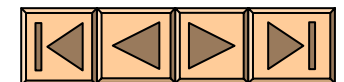


Segaarvude liitmine ja lahutamine (III)

Kui ülesandes on vaja lahutada murdarv negatiivsest arvust, siis liidetakse nende arvude absoluutväärtused ja tulemuse ette kirjutatakse miinusmärk:

Näide

$$\begin{aligned} -1\frac{5}{7} - 6\frac{5}{6} &= -\left(1\frac{5}{7} + 6\frac{5}{6}\right) = -\left[1 + 6 + \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{6}\right)\right] = \\ &= -\left[7 + \left(\frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7}\right)\right] = -\left[7 + \left(\frac{30 + 35}{42}\right)\right] = -\left[7 + \frac{65}{42}\right] = \\ &= -8\frac{23}{42}. \end{aligned}$$



Segaarv

*Segaarv*uks nimetatakse täisarvust ja lihtmurrust koosnevat ratsionaalarvu, milles lihtmuru lugeja ja nimetaja on mõlemad positiivsed, kuid murrule tervikuna mõjub täisarvu ette kirjutatud märk.

Segaarvu võib mõista kui summat täisarvust ja lihtmurrust:

$$2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}, \quad -3\frac{3}{8} = -3 + \left(-\frac{3}{8}\right) = -\left(3 + \frac{3}{8}\right)$$

Segaarvudena kirjutatakse tavaliselt vaid ülesannete vastused, sest aritmeetikatehete sooritamiseks lahenduskäigus tuleb segaarvud reeglina muuta liigmurdudeks.

Näited

$$1) \quad \left(30\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{92}{3}\right) \cdot \left(-\frac{23}{7}\right) = -\frac{92 \cdot 23}{3 \cdot 7} = -\frac{2116}{21} = -100\frac{16}{21}.$$

$$2) \quad \left(-4\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-3\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{21}{5}\right) \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) = \left(-\frac{21}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) = \frac{63}{55} = 1\frac{8}{55}.$$

