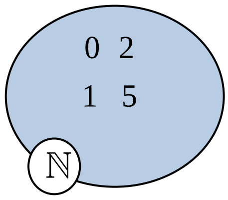
# Reaalarvud

Arvu mõiste on üks esimesi matemaatikaalaseid mõisteid, milleni inimühiskond jõudis juba ürgajal. Aja jooksul arvu mõiste muutus. Püüamegi arvu mõiste arengulugu jälgida.

Kõigepealt kujunes välja naturaalarvu mõiste. Naturaalarvude kasutuselevõtuga lahendas inimkond esemete loendamise probleemi.

**Naturaalarv** on selline arv, mis tekkis loendamise tulemusena. Nimetus tuleb ladina sõnast *natura,* mis eesti keeles tähendab loodust. Naturaalarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{N}$.

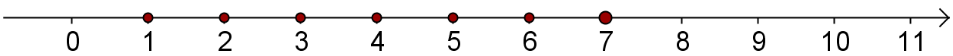
$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n;\ n+1;\ \ldots\}$




Naturaalarvude hulka nimetatakse ka mittenegatiivsete täisarvude hulgaks. Sageli jäetakse naturaalarvude hulgast välja arv null, sest otseselt loendamise teel on nulli raske saada, kui just ei loenda olmatuid objekte klassiruumis.

**Naturaalarvude hulga omadused:**

1. Naturaalarve saab **kujutada** punktina **arvteljel**.




2. Naturaalarve saab **järjestada**.
3. Naturaalarvude hulk on **lõpmatu**. Naturaalarvude hulgas leidub esimene arv ja iga arvu korral temale järgnev arv, kuid ei leidu niisugust arvu, mis oleks teistest naturaalarvudest suurim.
4. Naturalarvude hulk on **kinnine liitmise ja korrutamise suhtes**, sest iga kahe naturaalarvu summa ning korrutis on naturaalarv.

Naturaalarve saab tunnuse põhjal jaotada erinevateks hulkadeks. Näiteks jaotatakse naturaalarve

- Arvuga 2 jaguvuse alusel **paaris- ja paarituteks arvudeks**.
- Arvude jaguvuse alusel **alg- ja kordarvudeks. Algarvuks** nimetatakse ühest suuremat naturaalarvu, mis jagub vaid ühe ja iseendaga, kõiki ülejäänud ühest suuremaid naturaalarve aga kordarvudeks.

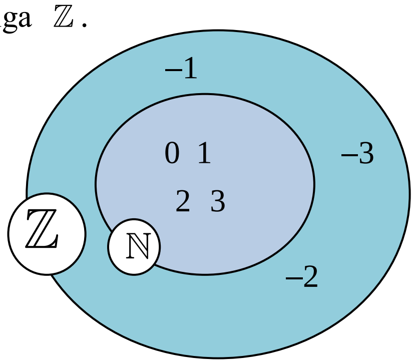
Elus tuleb ette olukordi, kus loendamise või arvutamise tulemust ei saa naturaalarvuga väljendada (näiteks võlg, külmakraadid, väiksemast naturaalarvust suurema lahutamine, jne). Sellise olukorra lahendamiseks võeti kasutusele uued arvud, mis kirjutati ülesse miinusmärgi abil. Tänapäeval tunneme neid arve negatiivsete arvudena. Negatiivsed täisarvud olid kasutusel Indias juba 5. sajandil, kuid tõenäoliselt pärinevad nad Hiinast. Euroopas hakati negatiivseid täisarve ja murde kasutama alles 17. sajandil. Ka matemaatikud esialgu ei tunnistanud negatiivseid arve. Tavaliselt jäeti miinusmärk võrrandi lahendil eest ära või ei arvestatud saadud negatiivset lahendit.

Naturaalarvu $n$ **vastandarvuks** nimetatakse arvu $-n$. Vastandarvude korral kehtivad seosed:

$$-(-a)=a$$
$$a+(-a)=0$$

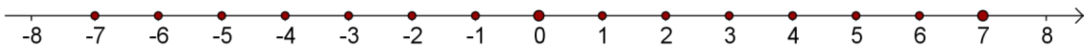
Naturaalarvude hulga laiendamisel naturaalarvude vastandarvudega saadakse **täisarvude hulk**. Täisarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}=\{\ldots;\ -n;\ \ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}$$




**Täisarvude hulga omadused:**

1. Täisarve saab **kujutada** punktina **arvteljel**.

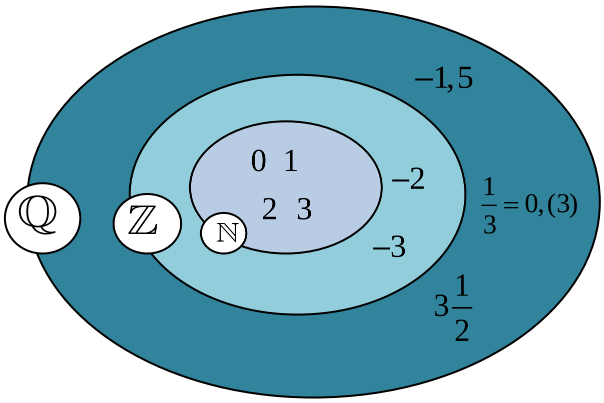



2. Täisarve saab **järjestada**.
3. Täisarvude hulk on **lõpmatu**, sest ei leidu suurimat ega ka vähimat arvu.
4. Täisarvude hulk on **kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes**.

Juba ürginimesel oli vaja üks saakloom jaotada tükkideks. Jagamise tulemusena tekkisid aga sageli murdarvud, millega tegelemine kuulus juba keerulisemate kunstide hulka. Murdarvude iidset päritolu kinnitavad keeltes lihtsamate murdarvude jaoks kasutatavad sõnad, näiteks eesti keeles pool, veerand, kolmveerand jne., mis erinevad tavalisest murdarvude terminoloogiast. Murdarvud ja tehted nendega olid tundud juba Antiik-Kreekas, kuid tänapäevase nimetuse ratsionaalarvud said murrud veidi hiljem ladina sõnast *ratio* (suhe).

**Ratsionaalarvuks** nimetatakse arvu, mis avaldub kahe täisarvu jagatisena, kusjuures jagaja on nullist erinev. Ratsionaalarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{Q}$, st

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ \text{kus } a, b \in \mathbb{Z} \text{ ja } b \neq 0 \right\}$$

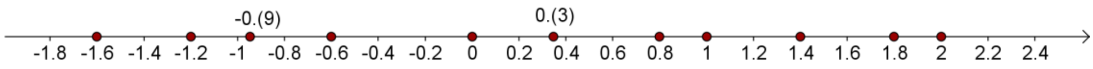



Ratsionaalarvu $\frac{a}{b}$ **pöördarvuks** nimetatakse ratsionaalarvu $\frac{b}{a}$, st

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

**Ratsionaalarvude hulga omadused:**

1. Ratsionaalarve saab **kujutada** punktina **arvteljel**.




2. Ratsionaalarve saab **järjestada**.
3. Ratsionaalarvude hulk on **lõpmatu.**
4. Ratsionaalarvude hulk on **tihe**, sest iga kahe ratsionaalarvu vahel on vähemalt üks ratsionaalarv.
5. Ratsionaalarvude hulk on **kinnine liitmise, lahutamise, korrutamise ja nullist erineva arvuda jagamise suhtes**.

Ajaloost on teada, et 535. Aastal eKr asutas Pytagoras Lõuna-Itaalias oma õpilastest nn pütaagorlaste liidu. Selle rühmituse liikmed uurisid ka ruutu, mille küljepikkus on 1 pikkusühik, ja avastasid, et ühikruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Antiik-Kreekas tõestati, et ruutjuur kõigist neist naturaalarvudest, mis pole täisarvu ruudud, on mitteratsionaalsed, ja neid arve hakati nimetama irratsionaalarvudeks. Irrratsionaalarvu nimetus pärineb ladina sõnast *irrationalis*- mittemõistuslik, mõistusega seletamatu. Üks tuntumaid irratsionaalarve on $\pi$. Esimene teadlane, kes andis range meetodi $\pi$ arvutamiseks, oli Arhimedes (u 287-212 eKr). Meie kasutame koolis $\pi$ lähendina arvu $3{,}14$. Ameerika koolides aga kasutatakse $\pi$ väärtusena Arhimedese srvu $\frac{22}{7}$.

**Irratsionaalarvuks** nimetatakse arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna. Irratsionaalarve tähistatakse sümboliga $\Im$.

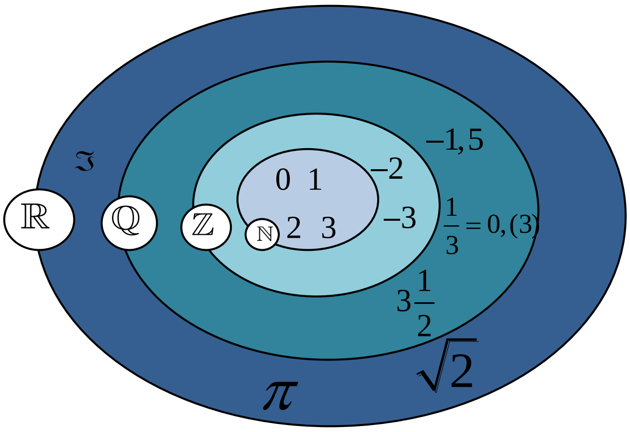
$$\Im = \left\{\pi;\ -\sqrt{5};\ \sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ ...\right\}$$

Kaasaegne reaalarvude teooria loodi alles 19. sajandi teisel poolel Georg Cantori[1] ja Richard Dedekindi[2] poolt.

**Reaalarvuks** nimetatakse lõplikke ja lõpmatuid kümnendmurde. Reaalarvude hulka tähistatakse sümboliga $\mathbb{R}$.

[1] Georg Cantor (1845-1918) saksa matemaatik.

[2] Richard Dedekindi (1831-1916) Berliini TA ja Pariisi TA akadeemik.




**Reaalarvude hulga omadused:**

1. Reaalarve saab **kujutada** punktina **arvteljel**. Kõik reaalarvud täidavad kogu arvtelje
2. Reaalarvude hulk on **järjestatud lõpmatu hulk**.
3. Reaalarvude hulk on **pidev**, see tähendab, et nende arvudele vastavad punktid katavad kogu arvtelje.
4. Reaalarvude hulk on **kinnine liitmise, lahutamise, korrutamise ja nullist erineva arvuga jagamise suhtes**. Ruutjuur mittenegatiivsest reaalarvust on reaalarv.

Georg Cantor

Richard Dedekindi