KOOLIMATEMAATIKA KOGUMIK

LEA PALLAS

I OSA

SISUKORD

1. ARVUHULGAD

Positiivsed täisarvud ehk naturaalarvud tekkisid vajadusest loendada esemeid. Kõik naturaalarvud moodustavad **naturaalarvude hulga** $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$. Naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes. Naturaalarvude hulk muutub kinniseks lahutamise suhtes, kui teda täiendada arvude 1, 2, 3, ... vastandarvudega -1, -2, -3, ...

Negatiivsed ja positiivsed täisarvud ning arv 0 moodustavad **täisarvude hulga** $\mathbb{Z} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; ...\}$. Täisarvude hulk on kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes.

Laiendades täisarvude hulka positiivsete ja negatiivsete murdarvudega, saame **ratsionaalarvude hulga** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ \text{kus}\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\ \text{ ja }\ b \neq 0 \right\}$. Ratsionaalarve saab esitada nii kahe täisarvu suhtena kui ka lõplike või lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena. Näiteks $\frac{3}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}$.

Kokkuvõttes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse **irratsionaalarvuks**. Näiteks $\sqrt{3}$, $4 + \sqrt{2}$. Kõigi irratsionaalarvude hulga tähis on *I*.

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud koos moodustavad **reaalarvude hulga** $\mathbb{R}$**.** Seega $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.

Reaalarvude hulk on kinnine liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise (v.a. jagamine nulliga) suhtes.

Reaalarve saab kujutada arvtelje punktidena. *Arvtelg* on lõpmatu sirge, millel on valitud nullpunkt, positiivne suund ja pikkusühik. Kõigi reaalarvude ja arvtelje kõigi punktide vahel on üksühene vastavus.

Reaalarvude hulga omadus: iga kahe suvalise reaalarvu vahel leidub nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarve.

2. ARITMEETIKA

2.1 Mõningate arvude kõrgemad astmed

$2^4 = 16$	$2^9 = 512$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$6^4 = 1296$
$2^5 = 32$	$2^{10} = 1024$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$6^5 = 7776$
$2^6 = 64$	$2^{11} = 2048$	$3^6 = 729$	$4^6 = 4096$	$7^4 = 2401$
$2^7 = 128$	$2^{12} = 4096$	$3^7 = 2187$	$5^4 = 625$	$8^4 = 4096$
$2^8 = 256$	$2^{13} = 8192$	$3^8 = 6561$	$5^5 = 3125$	$9^4 = 6561$

2.2 Hariliku murru põhiomadus

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Kui $k \neq 0$, siis

$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ (murru laiendamine). Näiteks $\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15}$.

Kui $k \neq 0$, siis

$\frac{ka}{kb} = \frac{ka : k}{kb : k} = \frac{a}{b}$ (murru taandamine). Näiteks $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

2.3 Tehetevahelised seosed

Kui $x + a = b$, siis $x = b - a$. Näiteks $7 + 8 = 15$, sellest $7 = 15 - 8$.

Kui $a + x = b$, siis $x = b - a$. Näiteks $7 + 8 = 15$, sellest $8 = 15 - 7$.

Kui $x - a = b$, siis $x = a + b$. Näiteks $8 - 9 = -1$, sellest $8 = 9 - 1$.

Kui $a - x = b$, siis $x = a - b$. Näiteks $8 - 9 = -1$, sellest $9 = 8 - (-1) = 8 + 1$.

Kui $a \cdot x = b$, siis $x = b : a$ ehk $x = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$. Näiteks $3 \cdot 7 = 21$, sellest $7 = 21 : 3 = \frac{21}{3}$.

Kui $x \cdot a = b$, siis $x = b : a$ ehk $x = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$. Näiteks $3 \cdot 7 = 21$, sellest $3 = 21 : 7 = \frac{21}{7}$.

Kui $a : x = b$ ehk $\frac{a}{x} = b$, siis $x = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. Näiteks $42 : 7 = 6$ ehk $\frac{42}{7} = 6$, sellest $7 = \dfrac{42}{6}$.

Kui $x : a = b$ ehk $\dfrac{x}{a} = b$, siis $x = ab \quad (a \neq 0)$. Näiteks $42 : 7 = 6$ ehk $\dfrac{42}{7} = 6$,

sellest $42 = 7 \cdot 6$.

2.4 Tehted harilike murdudega

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$. Näiteks $\dfrac{5}{7} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{5+6}{7}$.

$\dfrac{a}{b}^{\backslash d} + \dfrac{c}{d}^{\backslash b} = \dfrac{ad+cb}{bd}$. Näiteks $\dfrac{5}{6}^{\backslash 5} + \dfrac{3}{5}^{\backslash 6} = \dfrac{5 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{6 \cdot 5}$.

$\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$. Näteks $\dfrac{5}{8} - \dfrac{9}{8} = \dfrac{5-9}{8}$.

$\dfrac{a}{b}^{\backslash d} - \dfrac{c}{d}^{\backslash b} = \dfrac{ad-cb}{bd}$. Näiteks $\dfrac{7}{9}^{\backslash 35} - \dfrac{6}{35}^{\backslash 9} = \dfrac{7 \cdot 35 - 6 \cdot 9}{9 \cdot 35}$.

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$. Näiteks $\dfrac{8}{11} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{8 \cdot 5}{11 \cdot 3}$.

$\dfrac{a}{b} \cdot c = \dfrac{ac}{b}$. Näiteks $\dfrac{5}{12} \cdot 7 = \dfrac{5 \cdot 7}{12}$.

$a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c}$. Näiteks $3 \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{3 \cdot 2}{7}$.

$\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$. Näiteks $\dfrac{3}{4} : \dfrac{7}{13} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{13}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{13}{7} = \dfrac{3 \cdot 13}{4 \cdot 7}$.

$\dfrac{a}{b} : c = \dfrac{a}{bc}$. Näiteks $\dfrac{5}{9} : 8 = \dfrac{5}{9 \cdot 8}$.

$a : \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$. Näiteks $9 : \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{\frac{4}{5}} = 9 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{9 \cdot 5}{4}$.

2.5 Tehete põhiomadused

Vahetuvus ehk kommutatiivsus**:**

$$a+b=b+a$$

$$ab=ba$$

$$a(b+c)=(b+c)a$$

Ühenduvus ehk assotsiatiivsus:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a(bc)=(ab)c$$

Jaotuvus ehk distributiivsus:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$a(b-c)=ab-ac$$

Sulgude avamine:

$$a+(b+c)=a+b+c \qquad a+(b-c)=a+b-c$$

$$a-(b+c)=a-b-c \qquad a-(b-c)=a-b+c$$

Viimased kaks valemit ütlevad, et miinusmärk sulgude ees muudab märgid sulgude sees.

Näiteks
$9-(3+4)=9-3-4$ ja $8-(2-3)=8-2+3$.

2.6 Näited tehete kohta positiivsete ja negatiivsete arvudega

Näide 1.

a) liitmine

$15+(+8)=15+8=23$

$18+(-27)=18-27=-9$ (lahtiseletatult: -9 saame, kui suuremast arvust, milleks on 27, lahutame väiksema ja märgiks paneme suurema arvu märgi)

$10+(-7)=10-7=3$

$-5+(-14)=-5-14=-21$ (liidame 5 ja 14 ning lisame miinusmärgi)

$-18+(+13)=-18+13=-5$ (-5 saame, kui suuremast arvust, milleks on 18, lahutame väiksema ja märgiks paneme suurema arvu märgi)

b) lahutamine

$3-(+8)=3-8=-5$
$7-(-2)=7+2=9$
$-4-(-6)=-4+6=2$
$-5-(+2)=-5-2=-7$

c) korrutamine

$3\cdot(+9)=3\cdot 9=27$ (tegurid on ühemärgilised, korrutis on positiivne arv)
$7\cdot(-5)=-7\cdot 5=-35$ (tegurid on erimärgilised, korrutis on negatiivne arv)
$-8\cdot(+6)=-8\cdot 6=-48$ (tegurid on erimärgilised, korrutis on negatiivne arv)
$-4\cdot(-2)=4\cdot 2=8$ (tegurid on ühemärgilised, korrutis on positiivne arv)

d) jagamine

$63:(+9)=7$ (jagatav ja jagaja on ühemärgilised, jagattis on positiivne arv)
$54:(-6)=-9$ (jagatav ja jagaja on erimärgilised, jagattis on negatiivne arv)
$-36:(+9)=-4$ (jagatav ja jagaja on erimärgilised, jagattis on negatiivne arv)
$-56:(-7)=8$ (jagatav ja jagaja on ühemärgilised, jagattis on positiivne arv)

2.7 Näited tehete kohta ratsionaalarvudega

Mitme tehtega ülesandes kõigepealt korrutatakse või jagatakse ja seejärel liidetakse või lahutatakse. Kui ülesandes esinevad sulud, siis tehakse tehted esmalt ümarsulgudes, siis nurksulgudes ja seejärel looksulgudes.

Näide 1. Arvutada

$$\left[\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right)\cdot 9+0,16\right]:\left(\frac{1}{3}-0,3\right).$$

Lahendus. Kirjutame tehete kohale nende järjekorra numbri ja arvutame.

$$\left[\left(\frac{1}{30}\overset{1.}{+}\frac{1}{225}\right)\overset{2.}{\cdot}9\overset{3.}{+}0,16\right]\overset{5.}{:}\left(\frac{1}{3}\overset{4.}{-}0,3\right)$$

1) $\frac{1^{(15}}{30}+\frac{1^{(2}}{225}=\frac{15+2}{450}=\frac{17}{450}$;

2) $\frac{17}{450}\cdot 9=\frac{17}{50}$;

3) $\dfrac{17}{50}+0{,}16=\dfrac{17}{50}+\dfrac{8}{50}=\dfrac{25}{50}=\dfrac{1}{2}$;

4) $\dfrac{1}{3}-0,3=\dfrac{1^{\backslash 10}}{3}-\dfrac{3^{\backslash 3}}{10}=\dfrac{10-9}{30}=\dfrac{1}{30}$;

5) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{30}=\dfrac{1\cdot 30}{2\cdot 1}=15$.

Vastus. 15.

Näide 2. Arvutada

$$(5-1{,}1409:3):(4,2:12-0,21\cdot\frac{2}{3}).$$

Lahendus. Kirjutame tehete kohale nende järjekorra numbri ja arvutame.

$$(5\overset{2.}{-}1{,}1409\overset{1.}{:}0,3)\overset{6.}{:}(4,2\overset{3.}{:}12\overset{5.}{-}0,21\overset{4.}{\cdot}\frac{2}{3})$$

1) 1,1409 : 0,3 = 11,409 : 3 = 3,803;

2) 5-3,803 = 1,197;

3) $4{,}2:12=4\dfrac{1}{5}:12=\dfrac{21}{5\cdot 12}=\dfrac{7}{20}$;

4) $0{,}21\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{21\cdot 2}{100\cdot 3}=\dfrac{7}{50}$;

5) $\dfrac{7^{\backslash 5}}{20}-\dfrac{7^{\backslash 2}}{50}=\dfrac{35-14}{100}=\dfrac{21}{100}$;

6) $1{,}197:\dfrac{21}{100}=\dfrac{1197\cdot 100}{1000\cdot 21}=\dfrac{57}{10}$.

Vastus. $\dfrac{57}{10}$.

Näide 3. Leida *x*, kui

$$\frac{3\frac{4}{15}}{(5{,}5+x):21\frac{3}{7}}-1\frac{3}{8}=5{,}625.$$

Lahendus.
Esimese tehtega arvutame tundmatut *x* sisaldava murru väärtuse. Teises tehtes leiame selle murru nimetaja väärtuse. Nimetajas on jagatis, mille jagatava 5,5+*x* väärtuse arvutame kolmanda tehtega. Neljanda tehtega saame tundmatu *x* väärtuse.

1) $\frac{3\frac{4}{15}}{(5,5+x):21\frac{3}{7}} = 1\frac{3}{8}+5{,}625=1\frac{3}{8}+5\frac{5}{8}=7;$

2) $(5,5+x):21\frac{3}{7} = 3\frac{4}{15}:7=\frac{49}{15\cdot 7}=\frac{7}{15};$

3) $5,5+x=21\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{15}=\frac{150\cdot 7}{7\cdot 15}=10;$

4) x = 10-5,5 = 4,5.

Vastus. x = 4,5.

2.8 Protsent ja promill

Ratsionaalarvude hulgas on praktiline tähtsus murdudel, mille nimetaja on 100 või 1000.

Üks protsent $(1\ \%)$ on üks sajandik osa tervikust (arvust):

$$\boxed{1\%=\frac{1}{100}=0,01}.$$

Üks promill $(1\ ‰)$ on üks tuhandik osa tervikust (arvust):

$$\boxed{1\ ‰=\frac{1}{1000}=0,001}.$$

Protsentarvutuse põhiülesanded, millele taanduvad kõik protsentülesanded, on järgmised.

1. **Kahe arvu suhte väljendamine protsentides** ehk mitu protsenti moodustab arv *a* arvust *b*:

$$\frac{a}{b}\cdot 100\%.$$

2. **Osa või protsendi leidmine arvust** ehk leida *p*% arvust *m*:

$$p\%\cdot m=\frac{p\cdot m}{100}.$$

3. **Arvu leidmine antud osa järgi** ehk leida arv, millest p% on n:

$$\frac{n}{p\%}=\frac{n\cdot 100}{p}.$$

4. **Muutumise väljendamine protsentides** ehk mitu protsenti moodustab suuruse muut a selle suuruse esialgsest väärtusest A:

$$\frac{a}{A}\cdot 100\%.$$

2.9 Näited protsentarvutusest

Näide 1. Leida, mitu protsenti moodustab arv 20 arvust 160.

Lahendus. Leiame nende kahe arvu suhte ja väljendame selle protsentides:

$$\frac{20}{160}\cdot 100\%=\frac{1}{8}\cdot 100\%=12,5\%.$$

Näide 2. Raamaturiiulil on eestikeelsed ja ingliskeelsed raamatud. Eestikeelseid raamatuid on 15 ja ingliskeelseid 20% eestikeelsetest. Mitu ramatut on riiulil?

Lahendus. Leiame ingliskeelsete raamatute arvu (s.o. osa leidmine arvust):

$$20\%\cdot 15=\frac{20\cdot 15}{100}=3.$$

Eestikeelseid ja ingliskeelseid raamatuid on kokku $15+3=18$.

Vastus. Riiulil on 18 raamatut.

Näide 3. Mitu kilogrammi toorest kohvi on vaja võtta 7 kg praetud kohvi saamiseks, kui kohv kaotab praadimisel 12,5% oma kaalust.

Lahendus. Et kohv kaotab praadimisel 12,5% kaalust, siis jääb alles 100%-12,5%=87,5% kaalust. Seega 7 kg praetud kohvi on 87,5%. Leiame toore kohvi kaalu ehk 100% , s.o.:

$$\frac{7\cdot 100}{87,5}=8.$$

Vastus. Toorest kohvi tuleb võtta 8 kg.

Näide 4. Töötaja palk tõusis 4000 kroonilt 4500 kroonile. Mitme protsendi võrra tõusis palk?

Lahendus. Palga tõus (palga muut) on 4500-4000=500 krooni. Leiame palga muudu ja esialgse palga suhte protsentides:

$$\frac{500 \cdot 100}{4000}\% = 12{,}5\%.$$

Vastus. Palk tõusis 12,5% võrra.

Näide 5. Kui palju vaske on vaja lisada 810 grammile kullale prooviga 900, et saada kulda prooviga 750?

Lahendus. Tavaliselt on sulami **proov** antud **promillides:**

$$1‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Lisame sulamile x g vaske. Kogu sulami kaal on (x + 810) g. Puhast kulda on sulamis

$$900‰ \cdot 810 = 0{,}9 \cdot 810 = 729 \text{ g}.$$

Sulami proovi saame, kui puhta metalli kaalu jagame kogu sulami kaaluga.

Seega $\dfrac{729}{x+810} = \dfrac{750}{1000} = \dfrac{3}{4}.$

Leiame sellest võrrandist x:

$4 \cdot 729 = 3(x + 810),$

$3x = 2916 – 2430,$

$3x = 486 \mid :3 \quad ,$

$x = 162.$

Vastus. Sulamile tuleb lisada 162 g vaske.

2.10 Arvu absoluutväärtus

Reaalarvu x absoluutväärtus $|x|$ on arvteljel sellele arvule vastava **punkti kaugus nullpunktist**. Seega

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x\ , & kui \ \ x \geq 0\ , \\ -x\ , & kui \ \ x < 0\ . \end{cases}}$$

Kehtib seos $x \leq |x|$.

Absoluutväärtuse omadused.

I Reaalarvude summa absoluutväärtus ei ole suurem liidetavate absoluutväärtuste summast:

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

II Vahe absoluutväärtus ei ole väiksem vähendatava ja lahutatava absoluutväärtuste vahest:

$$|x-y| \geq |x|-|y|.$$

III Korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega:

$$|xy| = |x||y|.$$

IV Jagatise absoluutväärtus võrdub jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatisega:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Näiteks

$|10| = 10$,

$|-3| = 3$,

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, \text{ kui } a-b \geq 0 \text{ ehk } a \geq b, \\ -(a-b) = b-a, \text{ kui } a-b < 0 \text{ ehk } a < b. \end{cases}$$

$$x+|x-1| = \begin{cases} x+x-1 = 2x-1, \text{ kui } x-1 \geq 0 \text{ ehk } x \geq 1, \\ x+(-(x-1)) = x-x+1 = 1, \text{ kui } x-1 < 0 \text{ ehk } x < 1. \end{cases}$$

2.11 Ülesanded

1. Arvutada $-7+(-4)-(-9)+(+8)-(+6)$.
Vastus. 0.

2. Arvutada $5-(+7)+(-3)-(-2)+(-4)$.
Vastus. –7.

3. Arvutada $-7\cdot(-8):(+14)$.
Vastus. 4.

4. Arvutada $[+28:(+4)]\cdot(-6)$.
Vastus. -42.

5. Arvutada $-72:(+8):(-3)$.

Vastus. 3.

6. Arvutada

$$\frac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0,3}{0,2}.$$

Vastus. 6,5625.

7. Arvutada

$$\left(10:2\frac{2}{3}+7,5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0,25+\frac{157}{360}\right).$$

Vastus. $2\frac{3}{80}$.

8. Leida *x*, kui

$$\frac{2\frac{5}{8}-x\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4,375\right):19\frac{8}{9}}=2\frac{17}{21}.$$

Vastus. $x=\frac{2}{3}$.

9. Viinamarjade kuivatamisel saadud rosinate kaal moodustab 32% viinamarjade kaalust. Leida 2 kilogrammi rosinate saamiseks vajalik viinamarjade kaal.

Vastus. 6,25 kg.

10. Pliiats maksis 6 krooni ja 40 senti, peale hinnaalandust maksis sama pliiats 5 krooni ja 70 senti. Mitme protsendi võrra alandati pliiatsi hinda?

Vastus. 10,34%.

11. Õpperühmas on 30 üliõpilast, nendest 40% on naised. Mitu naisüliõpilast on selles õpperühmas?

Vastus. 12.

3. ALGEBRA

3.1 Astmed

Astmeks a^n nimetatakse korrutist, mille kõik tegurid on võrdsed arvuga *a* (astme alus) ja tegurite arv on *n* (astendaja):

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}}, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

kus $\mathbb{N}_1$ on naturaalarvude hulk alates arvust 1:

$$\mathbb{N}_1 = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, ...\}.$$

Astendaja 0 defineeritakse võrdusega $\boxed{\boldsymbol{a^0 = 1}}$, milles $a \neq 0$.

Negatiivse astendaja korral sisaldab astendamine ka jagamise:

$$\boxed{\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}}, \quad \text{kui } a \neq 0 \text{ ja } n \in \mathbb{Z} \text{ või kui } a > 0 \text{ ja } n \in \mathbb{Q},$$

kus $\mathbb{Z}$ on täisarvude hulk ja $\mathbb{Q}$ on ratsionaalarvude hulk:

$$\mathbb{Z} = \{\pm 1;\, \pm 2;\, \pm 3;\, ...\}, \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{d},\ \text{kus } b \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{Z} \text{ ja } d \neq 0 \right\}.$$

Murrulise astendaja korral sisaldab astendamine juurimise:

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}}, \quad \text{kui } a > 0,\ m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N}_2,$$

kus $\mathbb{N}_2$ on naturaalarvude hulk alates arvust 2:

$$\mathbb{N}_2 = \{2;\, 3;\, 4;\, ...\}.$$

Tehted astmetega

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n \quad (b \neq 0)$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \quad (a > 0)$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

3.2 Juured

Arvu a **n-ndaks juureks** nimetatakse arvu (tähistatakse $\sqrt[n]{a}$), mille astendamisel arvuga n saadakse arv a:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a .$$

Arv a on juuritav ja arv n on juurija.

Juure omadused

1. Igal positiivsel arvul a on parajasti üks n-ndat järku juur.
2. Negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.
3. Igal negatiivsel arvul on parajasti üks paaritu juurijaga juur, mis on samuti negatiivne.
4. Iga n $\left(n \neq 0\right)$ korral $\sqrt[n]{0} = 0$ ja $\sqrt[n]{1} = 1$.
5. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$. Muuhulgas $\sqrt{a^2} = |a|$.
6. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.

Tehted juurtega

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, kui $a \geq 0,\ b \geq 0$ (või kitsendusteta, kui $n = 2k+1$)

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$, kui $a < 0,\ b < 0$ ja $n = 2k$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0,\ b > 0$ (või kitsendusteta, kui $n = 2k+1$)

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, kui $a < 0,\ b < 0$ ja $n = 2k$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, kui $a \geq 0$ ja $n = 2k$ (või kitsendusteta, kui $n = 2k+1$)

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, kui $a \geq 0$ või kui $a < 0$ ja $n = 2k+1$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^m$, kui $a \geq 0$ või kui $a < 0$ ja $n = 2k$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$, kui $a \geq 0$ ja $n = 2k$ või kui $n = 2k+1$

3.3 Näited astendamisest ja juurimisest

Näide 1. Arvutada $(-3)^2 \cdot (-4)$.

Lahendus. $(-3)^2 \cdot (-4) = (-3) \cdot (-3) \cdot (-4) = 9 \cdot (-4) = -36$.

Näide 2. Arvutada $(+8)^2 \cdot (-5)^3$.

Lahendus. $(+8)^2 \cdot (-5)^3 = 8 \cdot 8 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 64 \cdot 25 \cdot (-5) = -8000$.

Näide 3. Arvutada $\sqrt{16 \cdot 25}$.

Lahendus. $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$.

Näide 4. Arvutada $\sqrt{\frac{9}{49}}$.

Lahendus. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$.

Näide 5. Korrutada $x^3 \cdot x^5$.

Lahendus. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$.

Näide 6. Jagada $\frac{m^7}{m^4}$.

Lahendus. $\frac{m^7}{m^4} = m^{7-4} = m^3$.

Näide 7. Astendada $(n^5)^2$.

Lahendus. $(n^5)^2 = n^{5 \cdot 2} = n^{10}$.

Näide 8. Kirjutada murruna y^{-4}.

Lahendus. $y^{-4} = \frac{1}{y^4}$.

Näide 9. Kirjutada juurena $b^{\frac{5}{6}}$.

Lahendus. $b^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{b^5}$.

Näide 10. Tuua tegur juure ette: $\sqrt[3]{125a^4}$.

Lahendus. $\sqrt[3]{125a^4} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{a^4} = 5a\sqrt[3]{a}$.

Näide 11. Arvutada $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 32^{-\frac{1}{5}} - 125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}9^{-1} \cdot 5^0.$

Lahendus. Kirjutame murrulise astendaja juurimisena ja negatiivse astendaja jagamisena:

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 32^{-\frac{1}{5}} - 125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}9^{-1} \cdot 5^0 = \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{\sqrt[5]{32}} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8^2} \cdot \frac{10}{9} \cdot 1 =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 5 + \frac{4 \cdot 10}{9} = -3 + 4\frac{4}{9} = 1\frac{4}{9}.$$

Vastus. $1\frac{4}{9}$.

Näide 12. Leida arv, millest 15% on $\dfrac{2^{-3} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{15 \cdot 3^0 - 0{,}1^{-1}}$.

Lahendus.

$$\frac{2^{-3} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{15 \cdot 3^0 - 0{,}1^{-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot 2^3}{15 - 10} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}}{5} = \frac{5}{8 \cdot 5} = \frac{1}{8}.$$

15% on $\frac{1}{8}$, seega on otsitav arv $\frac{1 \cdot 100}{8 \cdot 15} = \frac{5}{6}$.

Vastus. Arv on $\frac{5}{6}$.

Näide 13. Koondada $4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5 b} - 3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{a^2 b^4}$.

Lahendus. Avaldise esimeses liikmes korrutame kuupjuure all oleva murru lugejat ja nimetajat b-ga ning kolmandas liikmes teeme samasuguse korrutamise a^2-ga, sest siis saame nendest nimetajatest kuupjuure ära võtta. Teises ja neljandas liikmes toome täisastme juure ette. Koondame sarnased liikmed.

$$4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5 b} - 3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{a^2 b^4} = 4b\sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot b}} + \frac{2a}{a}\sqrt[3]{a^2 b} - 3a\sqrt[3]{\frac{b \cdot a^2}{a \cdot a^2}} - b\sqrt[3]{a^2 b} =$$

$$= \frac{4\cancel{b}^1}{\cancel{b}_1}\sqrt[3]{a^2 b} + 2\sqrt[3]{a^2 b} - \frac{3\cancel{a}^1}{\cancel{a}_1}\sqrt[3]{a^2 b} - b\sqrt[3]{a^2 b} = 3\sqrt[3]{a^2 b} - b\sqrt[3]{a^2 b} = (3 - b)\sqrt[3]{a^2 b} \ .$$

Vastus . $(3 - b)\sqrt[3]{a^2 b}$.

3.4 Korrutamise abivalemid

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$$

3.5 Hulkliikme lahutamine teguriteks

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{või} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad \text{või} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \quad \text{või} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \quad \text{või} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{või} \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \quad \text{või} \quad (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \quad \text{või} \quad (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$$
$$a - b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$
$$a + b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$
$$a - b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$
$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{b}\right)^3 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{ab} + b\right)$$
$$a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\right)^3 - \left(\sqrt{b}\right)^3 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(a + \sqrt{ab} + b\right)$$

3.6 Näited algebraliste avaldiste teisendamisest

Näide 1. Lahutada teguriteks $x^2-4xy+4y^2$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ning saame $x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$.

Näide 2. Lahutada teguriteks $25c^2-81$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ning saame $25c^2-81=(5c-9)(5c+9)$.

Näide 3. Lahutada teguriteks $64x^3+27$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ ning saame $64x^3+27=(4x)^3+3^3=(4x+3)\left(16x^2-12x+9\right)$.

Näide 4. Lahutada teguriteks $2x-y$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ ning saame $2x-y=\left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)$**.** Kui aga kasutame abivalemit $a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$, siis $2x-y=\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{2xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$.

Näide 5. Avada sulud $(2x+3y)^2$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ning saame $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$.

Näide 6. Avada sulud $(x-2)(x+2)$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ning saame $(x-2)(x+2)=x^2-4$.

Näide 7. Avada sulud $(3a-4b)^3$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ning saame

$$(3a-4b)^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 4b+3\cdot 3a(4b)^2-(4b)^3=$$
$$=27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3.$$

Näide 8. Avada sulud $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.

Lahendus. Kasutame abivalemit $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ ning saame
$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=(2a)^3-(3b)^3=8a^3-27b^3$.

Näide 9. Lihtsustada avaldis $\dfrac{a-1}{a^2-2a+1}+\dfrac{1}{a+1}$.

Lahendus. Lahutame esimese murru nimetajas oleva avaldise valemi $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ abil teguriteks. Taandame. Viime ühisele nimetalale ja koondame. Nimetajas kasutame veel valemit $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, selle abil saame nimetaja lühemalt kirjutada.

$$\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{a-1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a+1}=$$

$$=\frac{\cancel{a-1}^{\,1}}{(a-1)(\cancel{a-1})}+\frac{1}{a+1}=\frac{1^{\llcorner a+1}}{a-1}+\frac{1^{\llcorner a-1}}{a+1}=$$

$$=\frac{a+\cancel{1}+a-\cancel{1}}{(a-1)(a+1)}=\frac{2a}{a^2-1}.$$

Vastus. $\dfrac{2a}{a^2-1}$.

Näide 10. Lihtsustada avaldis $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

Lahendus. Lahutame teise murru nimetaja valemi $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ abil teguriteks, rakendades seda valemit kaks korda. Taandame. Viime ühisele nimetajale, koondame sarnased liiikmed. Taandame.

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)(\cancel{x-y})}{(\cancel{x-y})(x+y)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x^{\llcorner x+y}}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{x^2+\cancel{xy}-\cancel{xy}+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{\cancel{x^2+y^2}^{\,1}}{(x+y)(\cancel{x^2+y^2})}=\frac{1}{x+y}.$$

Vastus. $\frac{1}{x+y}$

Näide 11. Lihtsustada avaldis $\left(\frac{4x}{x+2}-\frac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\frac{4x^2-8x+16}{x^2-4}\right):\frac{16}{x+2}$.

Lahendus. Lahutame sulgudes oleva avaldise teise liikme lugeja ja nimetaja teguriteks, kasutades abivalemeid ning asendame väljaspool sulge oleva jagamise tehte korrutamisega (pöörame murru ringi). Taandame. Siis toome sulgude ette sulgudes oleva avaldise mõlemas liikmes esineva teguri $\frac{4}{x+2}$. Taandame. Koondamisel on sarnased liikmed alla joonitud.

$$\left(\frac{4x}{x+2}-\frac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\frac{4x^2-8x+16}{x^2-4}\right):\frac{16}{x+2}=$$

$$=\left[\frac{4}{x+2}\cdot x-\frac{\left(\cancel{x-2}\right)\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)\left(\cancel{x^2-2x+4}\right)}\cdot\frac{4\left(\cancel{x^2-2x+4}\right)}{\left(\cancel{x-2}\right)(x+2)}\right]\cdot\frac{x+2}{16}=$$

$$=\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{x+2}_{1}}\cdot\left[x-\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right]\cdot\frac{\cancel{x+2}^{1}}{\cancel{16}_{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(x^{(x+2}-\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\underline{\underline{x^2}}+\underline{2x}-\underline{\underline{x^2}}-\underline{2x}-4}{x+2}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{4}_{1}}\cdot\frac{-\cancel{4}^{1}}{x+2}=-\frac{1}{x+2}.$$

Vastus. $-\frac{1}{x+2}$.

Näide 12. Lihtsustada avaldis $\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$.

Lahendus. Toome esimese murru nimetajas ühise teguri sulgude ette. Sulgudes viime ühisele nimetajale. Esimese murru lugeja ja viimase muru nimetaja taandame. Viimase murru lugejas toome kahest esimesest ja kahest viimasest liikmest teguri sulgude ette nii, et mõlemasse sulgu jääks üks ja sama avaldis. Siis toome selle avaldise $1-n^3$ omakorda sulgude ette. Taandame. Lahutame avaldise n^3-1 abivalemiga teguriteks. Taandame.

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\frac{n}{n-1}-1^{\llcorner n-1}\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=$$

$$=\frac{\cancel{a^2-1}^{\,1}}{n(n+a)}\cdot\frac{\cancel{n}-\cancel{n}+1}{n-1}\cdot\frac{a(1-n^3)+n(1-n^3)}{-\left(\cancel{a^2-1}\right)_1}=$$

$$=\frac{1}{n\left(\cancel{n+a}\right)}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\left(1-n^3\right)\left(\cancel{a+n}\right)}{-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot(n^3-1)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n-1}_{\,1}}\cdot\left(\cancel{n-1}\right)\left(1+n+n^2\right)=\frac{1+n+n^2}{n}.$$

Vastus. $\dfrac{1+n+n^2}{n}$.

Näide 13. Lihtsustada avaldis

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{a+\sqrt{ab}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{4\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Lahendus. Võtame sulgude ette sulgudes oleva avaldise mõlemas liikmes esineva teguri $\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ja lahutame lahutame sulgudesse jääva murru lugeja ja nimetaja teguriteks, et taandada. Viimase jagamistehte asemele kirjutame korrutamise ja lahutame lugeja teguriteks. Taandame. Nüüd viime sulgudes ühisele nimetajale, koondame lugejas sarnased liikmed (need on alla joonitud) ja taandame.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{a+\sqrt{ab}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{4\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{2}{\cancel{\sqrt{a}-\sqrt{b}}_{\,1}}\left[1-\frac{\sqrt{a}\,\cancel{\sqrt{a}}}{\cancel{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]\cdot\frac{\left(\cancel{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{4\sqrt{ab}}=$$

$$=\left(1^{\llcorner\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}=\frac{\underline{\sqrt{a}}+\sqrt{b}-\underline{\sqrt{a}}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}_{\,1}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}^{\,1}}{2\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{b}}^{\,1}}{2\sqrt{a}\,\cancel{\sqrt{b}}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Vastus. $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$**.**

Näide 14. Sageli nõutakse juuravaldiste teisendamisel, et vastuseks oleva murru nimetajas ei esineks juurt (irratsionaalsust). Murru nimetaja vabastamine irratsionaalsusest tugineb algebralise murru põhiomadusele: algebralise murru lugeja ja nimetaja korrutamisel või jagamisel ühe ja sama avaldisega, mille väärtus ei ole null, saadakse murd, mis on samaselt võrdne antud murruga.

Vabastada murru nimetaja irratsionaalsusest: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

Lahendus. Korrutame murru lugejat ja nimetajat avaldisega $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, sest siis saame nimetajas kasutada abivalemit $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, mille rakendamisel kaovad nimetajast ruutjuured (nimetajas ei esine enam irratsionaalsust).

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{6\left(\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{9\cdot 2-4\cdot 3}=\frac{12+4\sqrt{6}}{6}=\frac{\cancel{4}^{\,2}\left(3+\sqrt{6}\right)}{\cancel{6}_{\,3}}=\frac{2\left(3+\sqrt{6}\right)}{3}.$$

Vastus. $\dfrac{2\left(3+\sqrt{6}\right)}{3}$.

3.7 Lineaarvõrrand

Lineaarvõrrandi üldkuju on $ax=b$.

Kui $a\neq 0$, siis saame võrrandi lahendiks $x=\dfrac{b}{a}$.

Kui $a=0$, siis võrrand omandab kuju $0\cdot x=b$. Kui seejuures $b=0$, siis on võrrandil lõpmatu hulk lahendeid (lahendiks on iga reaalarv). Kui aga $b\neq 0$, siis lahend puudub.

Lineaarvõrrandi lahendamiseks on vaja

1) viia võrrand üldkujule, jättes tundmatut sisaldavad liikmed vasakule poole ja vabaliikmed paremale poole võrdusmärki;

2) jagada mõlemad pooled tundmatu kordajaga.

3.8 Ruutvõrrand

Ruutvõrrandi üldkuju on $ax^2+bx+c=0$, kus $a \neq 0$.

Lahendite leidmiseks kasutatakse valemit

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \;.$$

Erijuhul, kui ruutliikme kordaja on üks, saab nn**. taandatud** ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendeid leida valemist

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\;.$$

Viète'i valemid. Taandatud ruutvõrrandi lahendid rahuldavad järgmisi seoseid:

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1\cdot x_2=q.$$

Neljanda astme võrrandit, mis sisaldab ainult tundmatu paarisastmeid, nimetatakse **biruutvõrrandiks.** Biruutvõrrandi üldkuju on $ax^4+bx^2+c=0$. Lahendamiseks kasutatakse abitundmatut $x^2=y$. Saadakse uus võrrand $ay^2+by+c=0$, mille lahendid on y_1 ja y_2. Paigutades *y* positiivsed väärtused võrdusesse $x^2=y$, saame

1) $x^2=y_1$, millest $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$;

2) $x^2=y_2$, millest $x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}$.

3.9 Ruutkolmliikme teguriteks lahutamine

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

milles x_1 , x_2 on ruutkolmliikme nullkohad (vastava ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid).

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

milles x_1 , x_2 on ruutkolmliikme nullkohad (vastava ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid).

3.10 Näiteid lineaarvõrrandite ja ruutvõrrandite lahendamisest ning ruutkolmliikmete teguriteks lahutamisest

Näide 1. Lahendada võrrand $1-\frac{2x+3}{6}=\frac{7-3x}{4}$.

Lahendus. Teeme vajalikud teisendused:

$$1-\frac{2x+3}{6}=\frac{7-3x}{4} \quad \Big| \cdot 12$$

$$12-2(2x+3)=3(7-3x)$$

$$12-4x-6=21-9x$$

$$-4x+9x=21-12+6$$

$$5x=15 \quad \Big| :5$$

$$x=3.$$

Kontroll. $x=3$,

$$v=1-\frac{2\cdot 3+3}{6}=1-1{,}5=-0{,}5$$

$$p=\frac{7-3\cdot 3}{4}=\frac{7-9}{4}=-0{,}5$$

$$v=p.$$

Vastus. Võrrandi lahend $x=3$.

Näide 2. Lahendada võrrand $3(x-2)+5=3x-1$.

Lahendus. Avame sulud:

$$3(x-2)+5=3x-1$$

$$3x-6+5=3x-1$$

$$3x-3x=-1+6-5$$

$$0\cdot x=0.$$

Vastus. Võrrandi lahenditeks on kõik reaalarvud.

Näide 3. Lahendada võrrand $\frac{4x-1}{2}+1=2(x+4)-5.$

Lahendus. Teeme vajalikud teisendused:

$$\frac{4x-1}{2}+1=2(x+4)-5 \quad \Big| \cdot 2$$

$$4x-1+2=4x+16-10$$

$$4x-4x=16-10-2+1$$

$$0 \cdot x=5.$$

Vastus. Võrrandil puudub lahend.

Näide 4. Lahendada võrrand $2x^2-x-1=0$.

Lahendus. Ruutvõrrandi lahendivalemi kohaselt

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \ , \quad x_1=-0{,}5 \, , \quad x_2=1 \ .$$

Vastus. $x_1=-0{,}5$, $x_2=1$
.

Näide 5. Lahendada võrrand $x^2+4x-5=0$.

Lahendus. Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi kohaselt

$$x=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3 \ , \quad x_1=-5 \, , \quad x_2=1 \ .$$

Vastus. $x_1=-5$, $x_2=1$.

Näide 6. Lahendada võrrand $x^2-x-6=0$.

Lahendus. See on taandatud ruutvõrrand, milles tundmatu *x* kordaja $p=-1$ ja vabaliige $q=-6$. Olgu lahendid x_1 ja x_2. Viète'i valemite kohaselt $x_1+x_2=-(-1)=1,\quad x_1\cdot x_2=-6.$ Leiame proovimise teel sellised kaks täisarvu (üks nendest on negatiivne, sest lahendite korrutis on negatiivne), mille korrutis on -6 ja summa 1. Need arvud on –2 ja 3. Seega võrrandi lahendid on $x_1=-2$ ja $x_2=3$.
Vastus. $x_1=-2$, $x_2=3$.

Näide 7. Lahendada võrrand $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

Lahendus. See on biruutvõrrand. Lahendamiseks kasutame abitundmatut $x^2 = y$. Saame uue võrrandi

$4y^2 - 37y + 9 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 9$ ja $y_2 = \frac{1}{4}$.

Paigutades y väärtused võrdusesse $x^2 = y$, saame

1) $x^2 = 9$, millest $x_1 = 3$, $x_2 = -3$;

2) $x^2 = \frac{1}{4}$, millest $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Biruutvõrrandi võib lahendada ka ilma abitundmatuta, kasutades vaid ruutvõrrandi lahendivalemit tundmatu ruudu leidmiseks.

Vastus. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Näide 8. Lahutada ruutkolmliige $15x^2 - 8x + 1$ teguriteks.

Lahendus. Moodustame ruutvõrrandi $15x^2 - 8x + 1 = 0$ ja lahendame selle.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15 \cdot 1}}{2 \cdot 15} = \frac{8 \pm 2}{30}; \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{5}.$$

Nüüd saame ruutkolmliikme lahutada teguriteks:

$$15x^2 - 8x + 1 = 15\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 5\left(x - \frac{1}{5}\right) = (3x-1)(5x-1).$$

Vastus. $15x^2 - 8x + 1 = (3x-1)(5x-1)$.

3.11 Determinandid

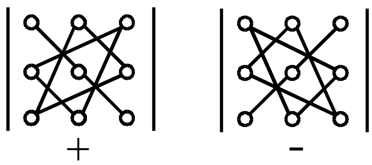
Teist järku determinandi väärtuse arvutamise eeskiri:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Kolmandat järku determinandi arvutamise eeskiri:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Skeemi kolmandat järku determinandi arvutamiseks nimetatakse **Sarrus`i reegliks**:



Näiteks

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - (-2)\cdot 4 = 21 + 8 = 29 \ ,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + +5\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 0 - 5\cdot 2\cdot 2 = 2 + 60 + 0 - 9 - 0 - 20 = 33 \ .$$

3.12 Lineaarvõrrandisüsteem

Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ , \\ a_2x + b_2y = c_2 \ . \end{cases}$$

Selles on x ja y tundmatud ning $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ on konstandid.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisel tuleb nad teisendada üldkujule ja seejärel lahendada sobiva võttega.

Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendusvõtted

I Liitmisvõte

Liitmisvõtte kasutamisel tuleb võrrandeid teisendada nii, et ühe tundmatu kordajateks võrrandites oleksid teineteise vastandarvud. Selleks korrutatakse võrrandi(te) pooli vastavalt valitud teguri(te)ga. Seejärel võrrandid liidetakse. Tulemuseks on ühe tundmatuga võrrand, millest leiame selle tundmatu väärtuse. Leitud väärtus asetatakse ühte antud võrrandeist ja lahendatakse see teise tundmatu suhtes.

II Asendusvõte

Võrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega seisneb järgnevas:

1) ühest võrrandist avaldatakse üks tundmatu teise kaudu;
2) leitud avaldis asetatakse teise võrrandisse;
3) lahendatakse saadud ühe tundmatuga võrrand;
4) teise tundmatu leidmiseks kasutatakse seda avaldist, millega tehti esialgne asendus.

Kui võrrandisüsteemi lahendamisel mõlemad tundmatud kaovad ja tekib mingi tõene arvvõrdus (samasus), siis on võrrandisüsteemil lõpmatu hulk lahendeid. Neid võib leida, kui anda ühele tundmatule vabalt väärtusi ja arvutada teise tundmatu vastavad väärtused. Sisuliselt on siis tegemist üheainsa võrrandiga (võrrandid on teineteisest sõltuvad).

Kolme tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1\ , \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\ , \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\ . \end{cases}$$

Kui süsteemi determinant $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$, siis Crameri valemite kohaselt on selle süsteemi lahendiks

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D},$$

kus

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

3.13 Näited lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisest

Näide1. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} 15x - 9y = 39\,, \\ 7x - 12y = 26\,. \end{cases}$

Lahendus. Lahendame võrrandisüsteemi liitmisvõttega. Selleks korrutame esimest võrrandit 4-ga ja teist (-3)-ga, seejärel liidame võrrandite vastavad pooled.

$$\begin{cases} 15x - 9y = 39 \,|\cdot 4 \\ 7x - 12y = 26 \,|\cdot (-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 60x - 36y = 156 \\ -21x + 36y = -78 \end{cases}$$

$$39x = 78 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Asetame *x* väärtuse esimesse võrrandisse ja arvutame *y* väärtuse:

$$15 \cdot 2 - 9y = 39 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \;.$$

Kontroll. $x = 2, \quad y = -1,$

$$v_1 = 15 \cdot 2 - 9 \cdot (-1) = 39$$

$$v_1 = p_1 \,.$$

$$v_2 = 7 \cdot 2 - 12 \cdot (-1) = 26$$

$$v_2 = p_2 \,.$$

Vastus. $x = 2, \quad y = -1$.

Näide 2. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} 2x-5y=28, \\ x-6y=0. \end{cases}$

Lahendus. Lahendame võrrandisüsteemi asendusvõttega. Avaldame tundmatu x teisest võrrandist: $x=6y$. Teeme vastava asenduse esimesse võrrandisse:

$$2\cdot 6y-5y=28 \quad \Rightarrow \quad y=4.$$

Avaldisest $x=6y$ leiame $x=6\cdot 4=24$.

Vastus. $x=24, \quad y=4$.

Näide 3. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} x+2y+z=5, \\ 4x-y+2z=-3, \\ 2x+3y+4z=3. \end{cases}$

Lahendus.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-4+12+8+2-6-32=-20 \;,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-20-9+12+3+24-30=-20 \;,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-12+12+20+6-6-80=-60 \;,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-3+60-12+10+9-24=40 \;.$$

Lahendivalemite järgi saame: $x=\dfrac{-20}{-20}=1, \quad y=\dfrac{-60}{-20}=3, \quad z=\dfrac{40}{-20}=-2.$

Vastus. $x=1, \quad y=3, \quad z=-2$.

3.14 Võrratus

Kui kahe avaldise (arvu) vahel on võrratusmärk ($<$, $>$, $\leq$ või $\geq$), siis sellist seost nimetatakse **võrratuseks**.

Võrratuse omadused

1. Kui $a > b$, siis $b < a$.
2. Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$.
3. Võrratuse mõlema poolega saab liita ühe ja sama avaldise (arvu):

   kui $a > b$, siis $a + c > b + c$.
4. Võrratuse märk jääb samapidiseks, kui võrratuse mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama positiivse arvuga:

   kui $a > b$ ja $c > 0$, siis $ca > cb$ ja $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
5. Võrratuse märk muutub vastupidiseks, kui võrratuse mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama negatiivse arvuga:

   kui $a > b$ ja $c < 0$, siis $ca < cb$ ja $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Võrratust, mis sisaldab tundmatut, saab lahendada.

Võrratuste lahendamisel on järgmised reeglid:

1) liikme märk muutub vastupidiseks, kui kanda ta võrratuse ühelt poolelt teisele;
2) võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama positiivse arvuga jääb võrratuse märk endiseks;
3) võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama negatiivse arvuga muutub võrratuse märk vastupidiseks;
4) võrratuse pooli ei tohi korrutada ega jagada tundmatut sisaldava avaldisega, mille märk pole teada, sest siis võime saada esialgse võrratusega mittesamaväärse võrratuse.

3.15 Lineaarvõrratus

Lineaarvõrratuseks ehk **esimese astme võrratuseks** nimetatakse võrratust, millele saab anda ühe kujudest $ax < b$, $ax > b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$, kus $a \neq 0$. Kaht esimest nimetatakse **rangeteks**, kaht viimast aga **mitterangeteks** võrratusteks.

Kui $ax < b$ ja $a > 0$, siis $x < \frac{b}{a}$.

Kui $ax < b$ ja $a < 0$, siis $x > \frac{b}{a}$.

Teised lineaarvõrratused lahendatakse analoogselt.

Kui $a = 0$, siis saadakse arvvõrratus (see ei ole lineaarvõrratus). Tõese arvvõrratuse lahenditeks on kõik reaalarvud. Mittetõese arvvõrratuse puhul lahendid puuduvad.

3.16 Lineaarne võrratussüsteem

Kaks või enam ühe ja sama tundmatuga võrratust koos vaadelduna moodustavad võrratussüsteemi.

Ühe tundmatuga lineaarvõrratussüsteemi lahendihulgaks on antud võrratuste lahendihulkade ühisosa.

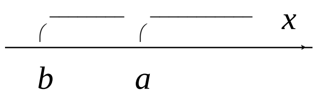
Võrratussüsteemi lahendamisel leiame iga võrratuse lahendihulga ja seejärel süsteemi lahendihulga.

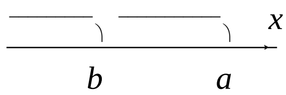
Võrratussüsteemi lahendamine taandub alati ühele neljast järgmisest juhust.

Eeldame, et $a > b$.

I ***Samapidised tõkked***

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \qquad \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$$

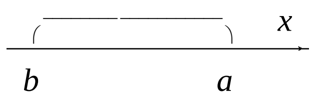




Lahendeiks $x > a$, lahendeiks $x < b$.

II ***Vastupidised tõkked***

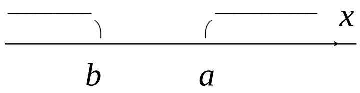
$$\begin{cases} x > b \\ x < a \end{cases}$$



Lahendid $b < x < a$.

III ***Vasturääkivad tõkked***

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$$



Lahendid puuduvad.

3.17 Ruutvõrratus

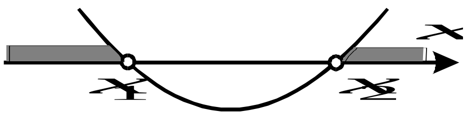
Ühe tundmatuga **ruutvõrratuseks** nimetatakse võrratust

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ või } ax^2 + bx + c < 0 \text{ (ka } \geq 0 \text{ või } \leq 0\text{).}$$

Näiteks ruutvõrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahendamine tähendab vastava ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ positiivsuspiirkonna leidmist. Olgu selle funktsiooni nullkohad ehk ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid x_1 ja x_2. Esineda võivad järgmised kolm juhtu.

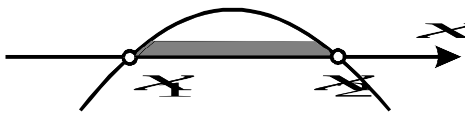
I. Kui $b^2 - 4ac > 0$, siis on ruutvõrrandil kaks erinevat lahendit x_1 ja x_2. Sõltuvalt ruutliikme kordaja *a* märgist on ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ positiivsuspiirkond ehk võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahendid järgmised:

$a > 0$



Võrratuse lahendid $x < x_1$ või $x > x_2$.

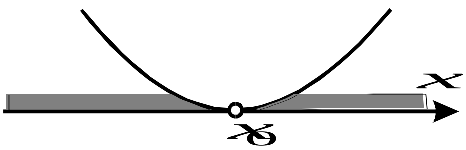
$a < 0$



Võrratuse lahendid $x_1 < x < x_2$.

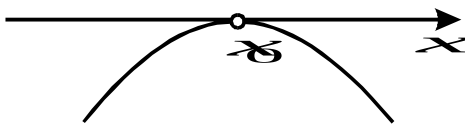
II. Kui $b^2 - 4ac = 0$, siis on ruutvõrrandil kaks võrdset lahendit x_1 ja x_2 ehk $x_1 = x_2 = x_0$. Vastava ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik puudutab *x*-telge:

$a > 0$



Võrratuse lahendid $x < x_0$ või $x > x_0$

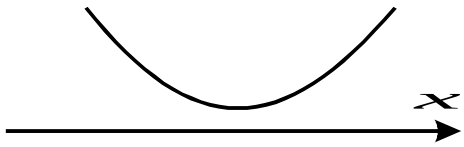
$a < 0$



Võrratuse lahendid puuduvad

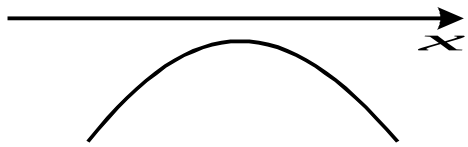
III. Kui $b^2 - 4ac < 0$, siis vastaval ruutfunktsioonil $y = ax^2 + bx + c$ nullkohad puuduvad, graafik ei lõika x-telge, on terves ulatuses ülal- või allpool x-telge:

$a > 0$



Võrratuse lahendid $x \in R$.

$a < 0$



Võrratuse lahendid puuduvad

Võrratusi $\boldsymbol{(x - x_1)(x - x_2) > 0}$ ja $\boldsymbol{(x - x_1)(x - x_2) < 0}$ saab lahendada ka järgmiselt:

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}.$$

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}.$$

3.18 Kõrgema astme võrratus

Olgu $P_n(x)$ algebraline hulkliige (polünoom), mille pealiikme (kõrgeima astmega liikme) kordaja on a_n:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

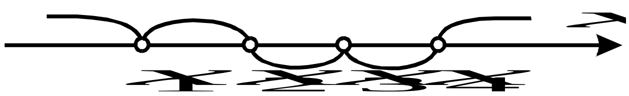
Kõrgema astme võrratuseks nimetatakse võrratust

$$P_n(x) > 0 \ \text{ või } \ P_n(x) < 0 \ \text{ (ka } \geq 0 \text{ või } \leq 0\text{).}$$

Kõrgema astme võrratuse lahendamiseks leiame vastava hulkliikme nullkohad. Kandes need nullkohad arvsirgele (x-teljele), tõmbame läbi nende punktide joone, alustades paremalt ja ülalt, kui pealiikme kordaja $a_n > 0$ ning paremalt ja alt, kui $a_n < 0$. Seejuures mingit nullkohta läbime x-telge lõigates, kui selle nullkoha järk on paaritu arv, ning puutudes, kui nullkoha järk on paarisarv.

Joonisel on esitatud näide, kus nullkohtade x_1 ja x_3 järgud on paarisarvud, nullkohtade x_2 ja x_4 järgud aga paaritud. Niiviisi saadud kõverat võib vaadelda funktsiooni $y = P_n(x)$ graafiku skitsina. Sellelt graafikult saab määrata võrratuse lahendid.

$a_n > 0$



3.19 Absoluutväärtusi sisaldavad võrratused

Absoluutväärtuse definitsioon: $|a| = \begin{cases} a, & kui \quad a \geq 0, \\ -a, & kui \quad a < 0. \end{cases}$

Vastavalt absoluutväärtuse definitsioonile:

1) võrratuse $|x| < a$ lahendihulk on $-a < x < a$;
2) võrratuse $|x| \leq a$ lahendihulk on $-a \leq x \leq a$;
3) võrratuse $|x| > a$ lahendihulk on $x < -a$ või $x > a$;
4) võrratuse $|x| \geq a$ lahendihulk on $x \leq -a$ või $x \geq a$.

Nende nn. **põhivõrratuste** abil on võimalik leida keerukamate võrratuste lahendihulgad.

3.20 Näited võrratuste ja võrratussüsteemide lahendamisest

Näide 1. Lahendada võrratus $\dfrac{5-2x}{3} + 3 < \dfrac{3x-8}{4} - x$.

Lahendus. Murdude kaotamiseks korrutame võrratuse pooli 12-ga:

$\dfrac{5-2x}{3} + 3 < \dfrac{3x-8}{4} - x \quad | \cdot 12$

$20 - 8x + 36 < 9x - 24 - 12x$

$-5x < -80 \quad | : (-5)$

Jagades võrratuse pooli (-5)-ga, saame vastupidise võrratuse

$x > 16$.

Vastus. $x > 16$.

Näide 2. Lahendada võrratus $2(x-3) - \dfrac{3-x}{3} > x + \dfrac{4x-3}{3}$.

Lahendus.

$2(x-3) - \dfrac{3-x}{3} > x + \dfrac{4x-3}{3} \quad | \cdot 3$

$6x - 18 - 3 + x > 3x + 4x - 3$

$0 > 18$

Tulemuseks saime vastuolu, sest null ei ole suurem kui pluss kaheksateist. Seega esialgsel võrratusel lahendid puuduvad.

Vastus. Võrratusel lahendid puuduvad.

Näide 3. Lahendada võrratus $3(x+5) > 3x-10$.

Lahendus. Avame sulud:

$3x+15 > 3x-10$

$15 > -10$

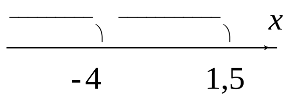
Pluss viisteist ongi suurem kui miinus kümme, järelikult on esialgse võrratuse lahendid kõik reaalarvud.

Vastus. Võrratuse lahenditeks on kõik reaalarvud ehk $x \in R$.

Näide 4. Lahendada võrratussüsteem $\begin{cases} 2x-3<0, \\ 0,5x+2<0. \end{cases}$

Lahendus. $\begin{cases} 2x-3<0 \\ 0{,}5x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<3 \\ 0{,}5x<-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1{,}5 \\ x<-4 \end{cases}$

Leiame süsteemi lahendid arvteljel:



Vastus. $x < -4$.

Näide 5. Lahendada võrratussüsteem $\begin{cases} 3(x-6)+\frac{1}{2}x > 2x-\frac{x-3}{2}, \\ 4x-\frac{x-3}{3} > x+\frac{x+19}{3}. \end{cases}$

Lahendus. Lahendame kummagi võrratuse eraldi:

1) $3(x-6)+\frac{1}{2}x > 2x-\frac{x-3}{2} \quad | \cdot 2$

$6x-36+x > 4x-x+3$

$4x > 39 \quad | : 4$

$x > 9\frac{3}{4}$

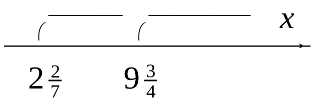
2) $4x-\frac{x-3}{3} > x+\frac{x+19}{3} \quad | \cdot 3$

$12x-x+3 > 3x+x+19$

$7x > 16 \quad | : 7$

$x > 2\frac{2}{7}$

Leiame süsteemi lahendid arvteljel:



Vastus. $x > 9{,}75$.

Näide 6. Lahendada võrratussüsteem $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2} - 1 < \dfrac{5+2x}{8} - 4, \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11x+3}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - 2. \end{cases}$

Lahendus. Lahendame võrratused eraldi:

1) $\dfrac{7-x}{2} - 1 < \dfrac{5+2x}{8} - 4 \quad \Big| \cdot 8$

$28 - 4x - 8 < 5 + 2x - 32$

$-6x < -47 \quad \big| : (-6)$

$x > 7\dfrac{5}{6}$

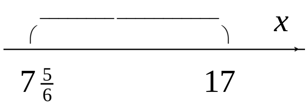
2) $\dfrac{7x}{3} - \dfrac{11x+3}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - 2 \quad \Big| \cdot 30$

$70x - 55x - 15 > 18x - 6 - 60$

$-3x > -51 \quad \big| : (-3)$

$x < 17$

Süsteemi lahendid:



Vastus. $\left(7\dfrac{5}{6}; 17\right)$, s.t. võrratussüsteemi lahenditeks on kõik reaalarvud sellest vahemikust.

Näide 7. Lahendada võrratussüsteem $\begin{cases} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3), \\ 9x - 5(2x+7) > 2(x-7). \end{cases}$

Lahendus. Lahendame võrratused eraldi:

1) $5x + 5 + 6x + 12 > 9x + 27$

$2x > 10 \quad \big| : 2$

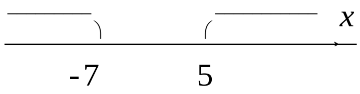
$x > 5$

2) $9x-10x-35>2x-14$

$-3x>21 \quad |:(-3)$

$x<-7$

Süsteemi lahendid:



Vastus. Süsteemil lahendid puuduvad.

Näide 8. Leida võrratussüsteemi täisarvulised lahendid: $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3} \end{cases}$.

Lahendus. Lahendame võrratused eraldi:

1) $\dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x \quad |\cdot 4$

$2x-11+38-4x<8x$

$-10x<-27 \quad |:(-10)$

$x>2{,}7$

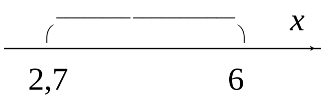
2) $\dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3} \quad |\cdot 45$

$10x+75>9x-9+15x$

$-14x>-84 \quad |:(-14)$

$x<6$

Süsteemi lahendid:



Reaalrvude vahemikus $(2{,}7\,;\,6)$ on täisarvud 3, 4 ja 5.

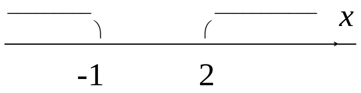
Vastus. $\{3\,;\,4\,;\,5\}$.

Näide 9. Lahendada võrratus $x^2-x-2>0$.

Lahendus. Lahendame ruutvõrrandi $x^2-x-2=0$, kasutame taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit:

$$x=0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+2}=0{,}5\pm1{,}5 \quad , \quad x_1=-1 \quad , \quad x_2=2\,.$$

Kanname lahendid arvteljele ja joonistame kõvera läbi nende lahendite. Alustame 2-st paremalt ja ülalt, kuna x^2 kordaja $a=1$, s.t. $a>0$ (vaata kõrgema astme võrratuste või ruutvõrratuste lahendamist):



Vastus. $(-\infty\,;-1),(2\,;\infty)$.

Näide 10. Lahendada võrratus $\dfrac{36x+70}{5}\geq 2x^2$.

Lahendus. Teisendame võrratuse üldkujule:

$$\frac{36x+70}{5}\geq 2x^2 \quad \Big|\cdot 5$$

$$36x+70\geq 10x^2$$

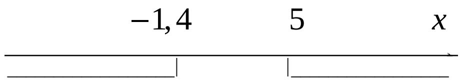
$$-10x^2+36x+70\geq 0 \quad \Big|:2$$

$$-5x^2+18x+35\geq 0.$$

Lahendame ruutvõrrandi $5x^2-18x-35=0$.

$$x=\frac{18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 5\cdot 35}}{2\cdot 5}=\frac{18\pm 32}{10} \quad , \quad x_1=-1{,}4 \quad , \quad x_2=5.$$

Kanname lahendid x-teljele ja joonistame kõvera läbi nende lahendite. Joonistamist alustame 5-st paremalt ja alt, kuna $a<0$ (siin x^2 kordaja $a=-5$)



Lahendite hulka kuuluvad ka nullkohad –1,4 ja 5, sest võrratus on mitterange.

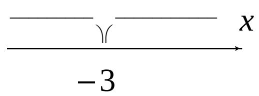
Vastus. $-1{,}4\leq x\leq 5$.

Näide 11. Lahendada võrratus $x^2+6x+9>0$.

Lahendus. Leiame nullkohad:

$$x^2+6x+9=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2=-3.$$

Kuna “ –3 “ esineb kaks korda nullkohana, siis vastava ruutfunktsiooni graafik telge ei läbi, vaid puudutab telge ja läheb samale poole tagasi:



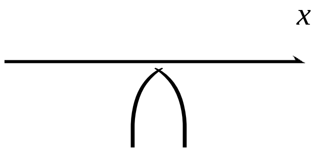
Vastus. $x<-3$ või $x>-3$.

Näide 12. Lahendada võrratus $-x^2+x-10>0$.

Lahendus. Lahendame ruutvõrrandi $x^2-x+10=0$.

$$x=0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-10}=0{,}5\pm\sqrt{-9{,}75}\,.$$

Reaalsed lahendid puuduvad (negatiivsest arvust ei saa võtta ruutjuurt). Kuna $a<0$, siis vastava ruutfunktsiooni graafik asetseb terves ulatuses allpool x-telge:



Vastus. Võrratusel lahendid puuduvad.

Näide 13. Lahendada võrratus $|2x-5|\le 2$.

Lahendus. Võrratuse $|x|\le a$ lahendihulk on $-a\le x\le a$, seega peab võrratuses $|2x-5|\le 2$ absoluutmärkide vahel olev avaldis täitma tingimusi

$$-2\le 2x-5\le 2\,.$$

Liidame selle võrratuse igale lülile arvu 5:

$$-2\le 2x-5\le 2\quad\Big|+5\,,$$

saame võrratuseahela

$$3\le 2x\le 7\,.$$

Jagame iga lüli arvuga 2:

$$3\le 2x\le 7\quad\Big|:2\,,$$

$$1{,}5\le x\le 3{,}5\,.$$

Vastus. $1{,}5\le x\le 3{,}5$.

Näide 14. Lahendada võrratus $|1-3x|>4$.

Lahendus. Võrratuse $|x|>a$ lahendihulk on $x<-a$ või $x>a$, seega peab võrratuses $|1-3x|>4$ absoluutväärtuse märkide vahel olev avaldis täitma tingimusi $1-3x<-4$ või $1-3x>4$. Lahendame need.

$$1-3x<-4 \qquad \text{või} \qquad 1-3x>4$$

$$-3x<-5\,\Big|:(-3) \qquad \text{või} \qquad -3x>3\,\Big|:(-3)$$

$$x>\frac{5}{3} \qquad \text{või} \qquad x<-1\,.$$

Vastus. $x>\dfrac{5}{3}$ või $x<-1$.

3.21 Logaritmid

Arvu *b* **logaritmiks** antud alusel *a* nimetatakse niisugust arvu *c*, millega on vaja astendada arvu *a*, et saada arv *b*.

$$\boxed{\log_a b = c\,, \text{ kui } a^c = b \quad (a > 0 \text{ ja } a \neq 1)}\,.$$

Asendades teises võrduses *c*, saame samasuse

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}\,.$$

Vastav samasus kümnendlogaritmide korral:

$$\boxed{10^{\log b} = b}\,.$$

Naturaallogaritmide korral:

$$\boxed{e^{\ln b} = b}\,.$$

Logaritmide omadused

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$, kui $m > 0$ ja $n > 0$.
4. $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$, kui $m > 0$ ja $n > 0$.
5. $\log_a b^n = n \log_a b$, kui $b > 0$.
6. $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$, kui $b > 0$.
7. $\log_a a^b = b$.
8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Märkus. $\log_a (b \pm c) \neq \log_a b \pm \log_a c$ **!**

Näide 1.

1) $\log_2 8 = 3$, sest $2^3 = 8$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$, sest $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$;

3) $5^{\log_5 12} = 12$;

4) $10^{\log 3} = 3$;

5) $e^{\ln 4} = 4$;

6) $36^{\log_6 5} = \left(6^2\right)^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^2 = 5^2 = 25$;

7) $100^{\frac{1}{2}-\log\sqrt[4]{4}} = \dfrac{100^{\frac{1}{2}}}{100^{\log\sqrt[4]{4}}} = \dfrac{\left(10^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(10^2\right)^{\log\sqrt[4]{4}}} = \dfrac{10}{10^{2\log\sqrt[4]{4}}} = \dfrac{10}{\left(10^{\log\sqrt[4]{4}}\right)^2} =$

$= \dfrac{10}{\left(\sqrt[4]{4}\right)^2} = \dfrac{10}{\sqrt[4]{4^2}} = \dfrac{10}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{10}{2} = 5;$

8) $5^{2+3\log_5 2} = 5^2 \cdot 5^{3\log_5 2} = 25\cdot\left(5^{\log_5 2}\right)^3 = 25\cdot 2^3 = 25\cdot 8 = 200$.

Arvu 10^n, kus $n \in Z$, nimetatakse järguühikuks. **Järguühiku kümnendlogaritm** võrdub arvuga *n* ehk

$$\log 10^n = n .$$

Näide 2.

1) $\log 100 = \log 10^2 = 2$;

2) $\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$;

3) $\log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4$.

Näide 3. Avaldada $\log u$, kui $u = \dfrac{5\sqrt[4]{3(x+1)^3}}{2x^3}$.

Lahendus. Kasutades korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmide omadusi, võime leida suvalise üksikliikme logaritmi, s.t. logaritmida avaldise.

Logaritmida algebraline avaldis – see tähendab väljendada selle avaldise logaritm temas esinevate arvude ja tähtede logaritmide kaudu.

Näites antud võrduse parem pool on murd, seega võib omaduse 4 kohaselt kirjutada:

$$\log u = \log 5\sqrt[4]{3(x+1)^3} - \log 2x^3 .$$

Omaduse 3 kohaselt:

$$\log 5\sqrt[4]{3(x+1)^3} = \log 5 + \log\sqrt[4]{3(x+1)^3}$$

ja

$$\log 2x^3 = \log 2 + \log x^3 .$$

Omaduse 6 põhjal

$$\log\sqrt[4]{3(x+1)^3} = \frac{1}{4}\left[\log 3(x+1)^3\right]$$

ja omaduse 5 põhjal

$$\log x^3 = 3\log x\ ,$$

$$\log 3(x+1)^3 = \log 3 + 3\log(x+1).$$

Järelikult $\log u = \log 5 + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{3}{4}\log(x+1) - \log 2 - 3\log x$.

Potentseerimiseks nimetatakse avaldise leidmist tema logaritmi järgi.

Potentseerimisel arvestame, et

1) $\log_a m + \log_a n = \log_a mn$;

2) $\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$;

3) $n\log_a b = \log_a b^n$;

4) $\frac{1}{n}\log_a b = \log_a \sqrt[n]{b}$;

5) $\frac{m}{n}\log_a b = \log_a \sqrt[n]{b^m}$.

Näide 4. Avaldada *u*, kui $\log u = (x+1)\log 3 - 2\log x - \log 7 + 2\log z$.

Lahendus. Valemi 3 põhjal

$$\log u = \log 3^{x+1} - \log x^2 - \log 7 + \log z^2.$$

Muudame liidetavate järjekorda, et rakendada valemit 1:

$$\log u = \left(\log 3^{x+1} + \log z^2\right) - \left(\log x^2 + \log 7\right).$$

Valemi 1 põhjal

$$\log u = \log 3^{x+1} \cdot z^2 - \log 7x^2$$

ja lõpuks valemi 2 põhjal saame:

$$\log u = \log \frac{3^{x+1} \cdot z^2}{7x^2}.$$

Seetõttu $u = \frac{3^{x+1} \cdot z^2}{7x^2}$ (kui logaritmid on võrdsed, siis on ka logaritmitavad avaldised võrdsed).

Vastus. $u = \frac{3^{x+1} \cdot z^2}{7x^2}$.

3.22 Summa märk

Summa märk on kreeka tähestiku suur täht Σ (sigma), mille abil tähistatakse lühidalt ühelaadsete liidetavate summat. Näiteks

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n .$$

Sümbolit Σ tuleb tõlgendada kui korraldust liitmiseks. Sümboli Σ järel on näidatud, millise kujuga avaldisi peab liitma (**üldliige** a_i). Sümboli Σ juures on näidatud, et kõigi liidetavate saamiseks tuleb täisarvulisele parameetrile *i* (**summeerimisindeks**) anda järjest väärtused alates väärtusest *m* kuni väärtuseni *n* (**summeerimisrajad**).

Kui summeerimisrajad selguvad kontekstist, siis kirjutatakse $\sum_{i} a_i$.

Kasutatakse ka tähistust $\sum_{i \in A} a_i$, kus *A* on summeerimisindeksi muutumispiirkond.

Näide 1. Kirjutada sümboli Σ abil summa

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5.$$

Lahendus. Olgu summeerimisindeks täht *k*, siis saame summa kõik liikmed näiteks avaldisest 2^k, kui $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$ Seega

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = \sum_{k=0}^{5} 2^k .$$

Selle summa liikmed saab ka avaldisest 2^{j-1}, kui $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$ Seega ka

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = \sum_{j=1}^{6} 2^{j-1} .$$

Võib leida veel kirjutisi antud summale sümboli Σ abil.

Näide 2. Kirjutada sümboli Σ abil summa

$$1-4+9-16+25-36.$$

Lahendus. Olgu summeerimisindeks täht *i*, siis saame summa kõik liikmed näiteks avaldisest $(-1)^{i+1} i^2$, kui $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$ Seega

$$1-4+9-16+25-36 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} i^2 .$$

Näide 3. Kirjutada sümboli Σ abil summa

$$1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7+\frac{1}{8}.$$

Lahendus. Valime summeerimisindeksiks näiteks tähe *m*. Selle summa liikmete astendajates vahelduvad $+1$ ja -1. Seega peame -1 astendajaks kirjutama näiteks avaldise $(-1)^{m+1}$ ja summa liikmete üldavaldis on siis $m^{(-1)^{m+1}}$, kui $m=1,2,3,4,5,6,7,8.$
Saame, et

$$1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7+\frac{1}{8}=1+2^{-1}+3+4^{-1}+5+6^{-1}+7+8^{-1}=\sum_{m=1}^{8} m^{(-1)^{m+1}}.$$

Näide 4. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{j=0}^{4}(2+j)$.

Lahendus. $\sum_{j=0}^{4}(2+j)=2+3+4+5+6$.

Näide 5. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{k=0}^{n}3$.

Lahendus. $\sum_{k=0}^{n}3=3+3+3+3+...=3(n+1)$.

Näide 6. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{i=0}^{5}a_i$.

Lahendus. $\sum_{i=0}^{5}a_i=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

Näide 7. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{n=1}^{1}(-1)^{n+2}4^n$.

Lahendus. $\sum_{n=1}^{1}(-1)^{n+2}4^n=(-1)^{1+3}\cdot 4=(-1)^4\cdot 4=4$.

Näide 8. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^k$.

Lahendus. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^k=-e+e^2-e^3+e^4-e^5+...+(-1)^n e^n$.

3.23 Ülesanded aritmeetikast ja algebrast

1. Arvutada $(+5)^2 \cdot (-3)$.
Vastus. -75.

2. Arvutada $\sqrt{49 \cdot 81}$.
Vastus. 63.

3. Arvutada $\sqrt{\dfrac{625}{36}}$.

Vastus. $\dfrac{25}{6}$.

4. Korrutada $c^9 \cdot c^{-3}$.
Vastus. c^6.

5. Jagada $\dfrac{d^2}{d^{-3}}$.
Vastus. d^5.

6. Astendada $\left(x^4\right)^5$.

Vastus. x^{20}.

7. Kirjutada murruna a^{-5}.
Vastus. $\dfrac{1}{a^5}$

8. Kirjutada juurena $x^{\frac{1}{3}}$.
Vastus. $\sqrt[3]{x}$.

9. Tuua tegur juure ette: $\sqrt{16a^5}$.
Vastus. $4a^2\sqrt{a}$.

10. Tuua tegur juure ette: $\sqrt{a^3}$.
Vastus. $a\sqrt{a}$.

11. Arvutada $$\frac{3^{-2} - 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{0,2^{-1} + \left(\frac{1}{7}\right)^0 + 1}.$$

Vastus. $\dfrac{169}{1575}$.

12. Lahutada teguriteks $36-64b^2$.
Vastus. $(6-8b)(6+8b)$.

13. Lahutada teguriteks $9x^2+24xy+16y^2$.
Vastus. $(3x+4y)^2$.

14. Lahutada teguriteks c^3-125.
Vastus. $(c-5)(c^2+5c+25)$.

15. Avada sulud $(8-n)^2$.
Vastus. $64-16n+n^2$.

16. Avada sulud $(2a+d)^3$.
Vastus. $8a^3+12a^2d+6ad^2+d^3$.

17. Avada sulud $(3a-7b)(3a+7b)$.
Vastus. $9a^2-49b^2$.

18. Avada sulud $(a-c)(a^2+ac+c^2)$.
Vastus. a^3-c^3.

19. Lihtsustada avaldis $\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x^2-1}$.
Vastus. $\frac{2x^2+3x}{x^2-1}$.

20. Lihtsustada avaldis $\frac{4a}{a+1}-\frac{3a^2+3a}{a^2+2a+1}+\frac{a}{a+1}$.
Vastus. $\frac{2a}{a+1}$.

21. Vabastada murru nimetaja irratsionaalsusest: $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

Vastus. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

22. Lahendada võrrand $5-5k+20=7-2k$.

Vastus. $k=6$.

23. Lahendada võrrand $3x^2 - 13x + 4 = 0$

Vastus. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

24. Lahendada võrrand $x^2 - x - 30 = 0$.

Vastus. $x_1 = -5$, $x_2 = 6$.

25. Lahendada võrrand $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Vastus. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

26. Lahutada ruutkolmliige $x^2 + 3x + 2$ teguriteks.

Vastus. $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.

27. Lahendada biruutvõrrand $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Vastus. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

28. Arvutada determinant $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$.

Vastus. 8.

29. Arvutada determinant $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Vastus. -49.

30. Lahendada lineaarvõrrandisüsteem $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

Vastus. $x = -1$, $y = -1$.

31. Lahendada lineaarvõrrandisüsteem $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 7, \\ -x + y + 2z = 7, \\ 3x \qquad - z = 0 \end{cases}$ Crameri valemite abil.

Vastus. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

32. Lahendada võrratus $3x - 6 \le 8$.

Vastus. $x \le \frac{14}{3}$.

33. Lahendada võrratus $8 - 6x \ge 15$.

Vastus. $x \le -\frac{7}{6}$.

34. Lahendada lineaarne võrratussüsteem $\begin{cases} 5x-3<2, \\ 2x+5<3. \end{cases}$

Vastus. $-1<x<1$.

35. Lahendada lineaarne võrratussüsteem $\begin{cases} 4-x>3, \\ x-5>2. \end{cases}$

Vastus. Võrratussüsteemil lahendid puuduvad.

36. Lahendada võrratus $|x+1|<2$.

Vastus. $-3<x<1$.

37. Lahendada võrratus $|7x+23|-5\ge 0$.

Vastus. $x\ge -\frac{18}{7}$ või $x\le -4$.

38. Arvutada $10^{2+\log 5}$.

Vastus. 500.

39. Arvutada $4^{\log_2 3+1}$.

Vastus. 36.

40. Arvutada $5^{1-0,5\log_5 49}$.

Vastus. $\frac{5}{7}$.

41. Arvutada $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9-\log 2}$.

Vastus. 22,5.

42. Arvutada $36^{\log_6 5}+10^{1-\log 2}-3^{\log_9 36}$.

Vastus. 24.

43. Arvutada $10^{2-\log 25}+\log_{0,2}125-36^{\log_6 5}$.

Vastus. –24.

44. Arvutada $27^{\log_3 4}+10^{1+\log 5}$.

Vastus. 114.

45. Arvutada $49^{1-\log_7 2-\log 2}+5^{-\log_5 4}$.

Vastus. 12,5.

46. Avaldada $\log x$, kui $x=\frac{4(a-2b)}{a^2\cdot\sqrt[5]{b^3}}$.

Vastus. $\log x = \log 4 + \log(a - 2b) - 2\log a - \frac{3}{5}\log b$.

47. Avaldada $\log u$, kui $u = \frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{3y^{-4}}$.

Vastus. $\log u = \frac{2}{3}\log(2x-1) - \log 3 + 4\log y$.

48. Avaldada y, kui $\log y = \log 2a - 3\log(4a+3b) + \frac{1}{2}\log b$.

Vastus. $y = \frac{2a\sqrt{b}}{(4a+3b)^3}$.

49. Avaldada u, kui $\log u = 2\log(x-1) - 3\log y - \log 5 + 6\log z$.

Vastus. $u = \frac{z^6(x-1)^2}{5y^3}$.

50. Kirjutada sümboli Σ abil summa $1+4+16+64+128$.

Vastus. $\sum_{i=0}^{4} 4^i$.

51. Kirjutada sümboli Σ abil summa $1-1+1-1+1-1+1$.

Vastus. $\sum_{m=1}^{7} (-1)^{m-1}$.

52. Kirjutada sümboli Σ abil summa $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$.

Vastus. $\sum_{k=2}^{6} \frac{k}{k+1}$.

53. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{k=1}^{5} c_k$.

Vastus. $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$.

54. Kirjutada ilma summa sümbolita summa $\sum_{i=0}^{4} (1+i)$.

Vastus. $1+(1+1)+(1+2)+(1+3)+(1+4)=15$.