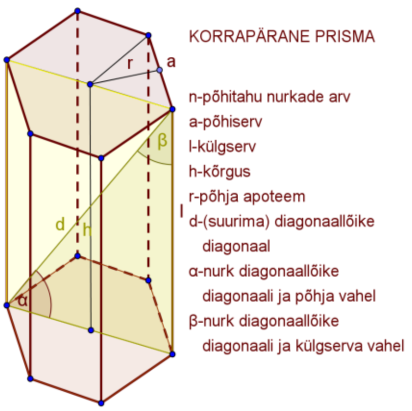
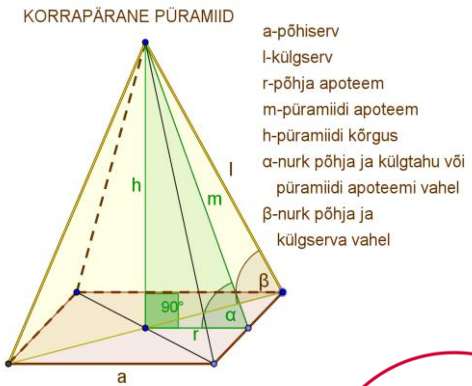
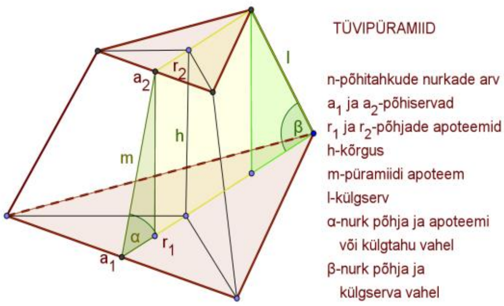
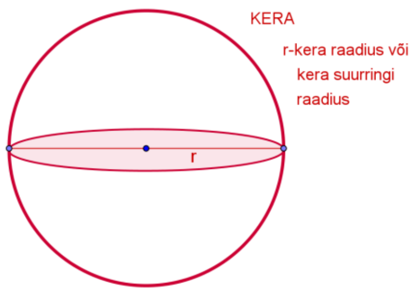
VII kursus — STEREOMEETRIA

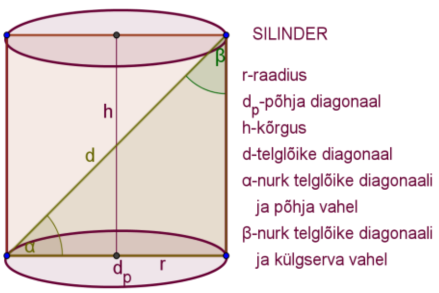
Keha	Põhja pindala	Külgpindala	Täispindala	Ruumala
TAHKKEHAD				
Prisma		$S_k = ü_r\, l$	$S_t = S_k + 2S_p$	$V = S_p h$
Püstprisma		$S_k = Ph$	$S_t = S_k + 2S_p$	$V = S_p h$
Korrapärane püstprisma	$S_p = pr$; $S_p = nar/2$ $p = P/2 = na/2$	$S_k = Ph$ $P = na$	$S_t = S_k + 2S_p$ $S_t = \underline{P(r+h)}$	$V = S_p h$
Püramiid			$S_t = S_k + S_p$	$V = 1/3 S_p h$
Korrapärane püramiid	$S_p = pr$; $S_p = nar/2$ $p = P/2 = na/2$	$S_k = pm$ $S_k = nam/2$	$S_t = S_k + S_p$ $S_t = \underline{p(r+m)}$	$V = 1/3 S_p h$
Korrapärane tüvipüramiid	$S_{p1} = p_1 r_1$ $S_{p2} = p_2 r_2$	$S_k = (p_1 + p_2)m$ $S_k = n\dfrac{a_1 + a_2}{2}m$	$S_t = S_k + S_{p1} + S_{p2}$ $S_t = p_1(m + r_1) + p_2(m + r_2)$	$V = \dfrac{h}{3}(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} * S_{p2}} + S_{p2})$
PÖÖRDKEHAD				
Silinder	$S_p = \pi r^2$	$S_k = Ph = \underline{2\pi rh}$ $P = c = 2\pi r$	$S_t = S_k + 2S_p$ $S_t = P(r+h) = \underline{2\pi r(r+h)}$	$V = S_p h$
Koonus	$S_p = \pi r^2$	$S_k = pm = \underline{\pi rm}$	$S_t = S_k + S_p$ $S_t = \underline{p(r+m)}$	$V = 1/3\, S_p h$
Tüvikoonus	$S_{p1} = \pi r_1$ $S_{p2} = \pi r_2$	$S_k = \pi * m(r_1 + r_2)$	$S_t = S_k + S_{p1} + S_{p2}$ $S_t = \pi\left[r_1^2 + r_2^2 + m(r_1 + r_2)\right]$	$V = \dfrac{h}{3}(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} * S_{p2}} + S_{p2})$ $V = \dfrac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Kera		$S = 4\pi r^2$		$V = 4/3\, \pi r^3$

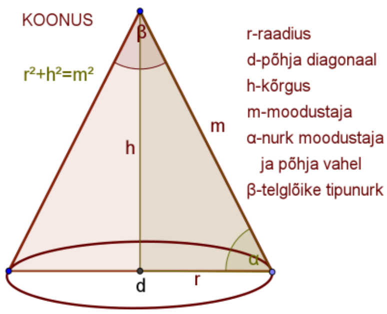


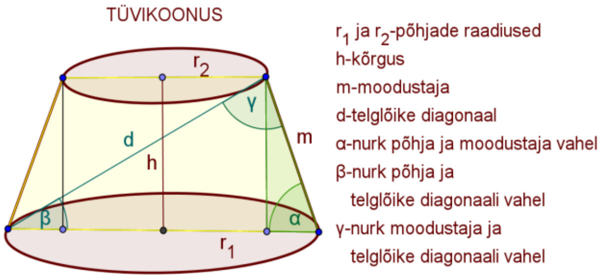












Kehade lahendamisel on tarvis teada ka planimeetria valemeid :
http://www.koolielu.ee/files/Planimeetria.ppt

Kõik näidisülesanded on võetud raamatust
E.Abel jt. „Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile"Tln.1990

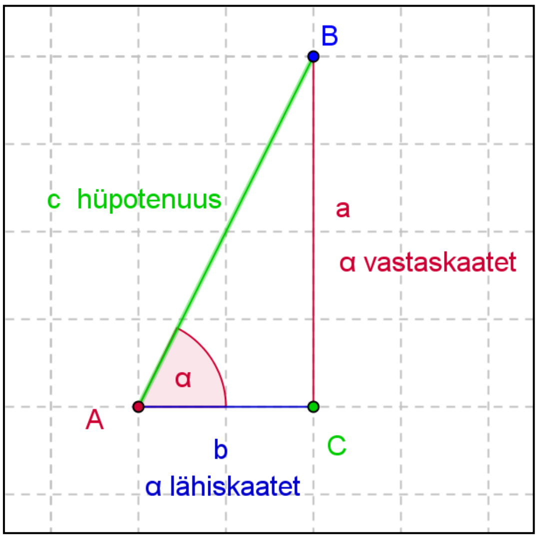
Pea meeles lisaks kehade valemitele ka täisnurkse kolmnurga lahendamise valemeid.

Pythagorase teoreem: kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga $a^2 + b^2 = c^2$
Eukleidese teoreem $a^2 = fc$ ja $b^2 = gc$ ning $h^2 = fg$

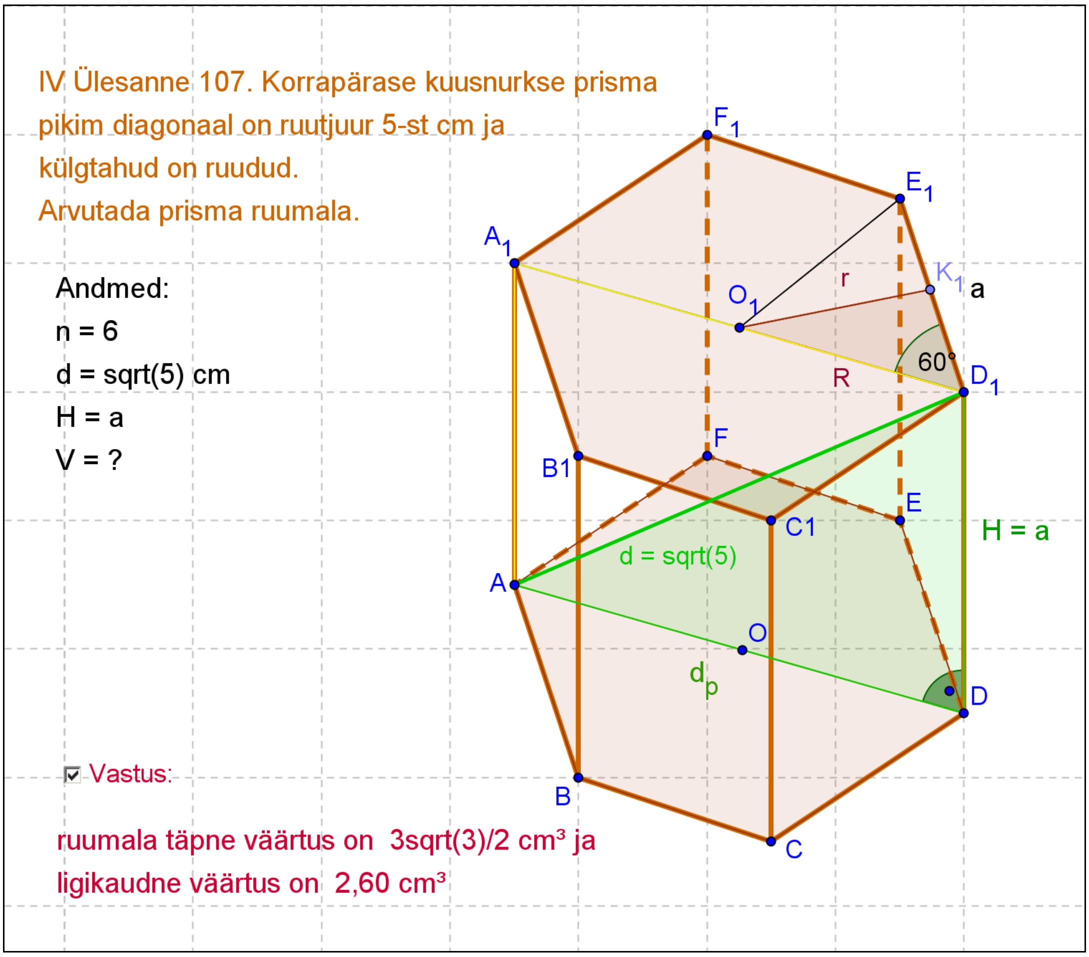
$$siinus = \frac{vastaskaatet}{hüpotenuus} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Teravnurga $$koosinus = \frac{lähiskaatet}{hüpotenuus} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan gens = \frac{vastaskaatet}{lähiskaatet} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{c}$$



Nälde 1.



Prisma pikim dagonaal $d = \sqrt{5}$ asub põhja pikimat diagonaali d_p läbival digonaallõikel ADA_1D_1. Et R = a ja d_p = 2R = 2a, (korrapärase kuusnurga diagonaalid jaotavad hulknurga 6-ks võrdkülgseks kolmnurgaks) siis täisnurksest kolmnurgast $ADD1$
Pythagorase reoreemi (kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga) põhjal

$$d_p^2 + H^2 = d^2 \Rightarrow (2a)^2 + a^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow 4a^2 + a^2 = 5 \Rightarrow 5a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ (cm)}.$$

Prisma ruumala valem on $V = S_p * H$. Teame, et H = a = 1 cm (külgtahud on ruudud). Vaja on arvutada põhja pindala $S_p = \frac{nar}{2}$. Valemist näeme, et vaja on leida veel põhja apoteem r.

Täisnurksest kolmnurgast $O_1D_1K_1$ $\sin 60^o = \frac{r}{R}$, millest $r = 1 * \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ (cm).

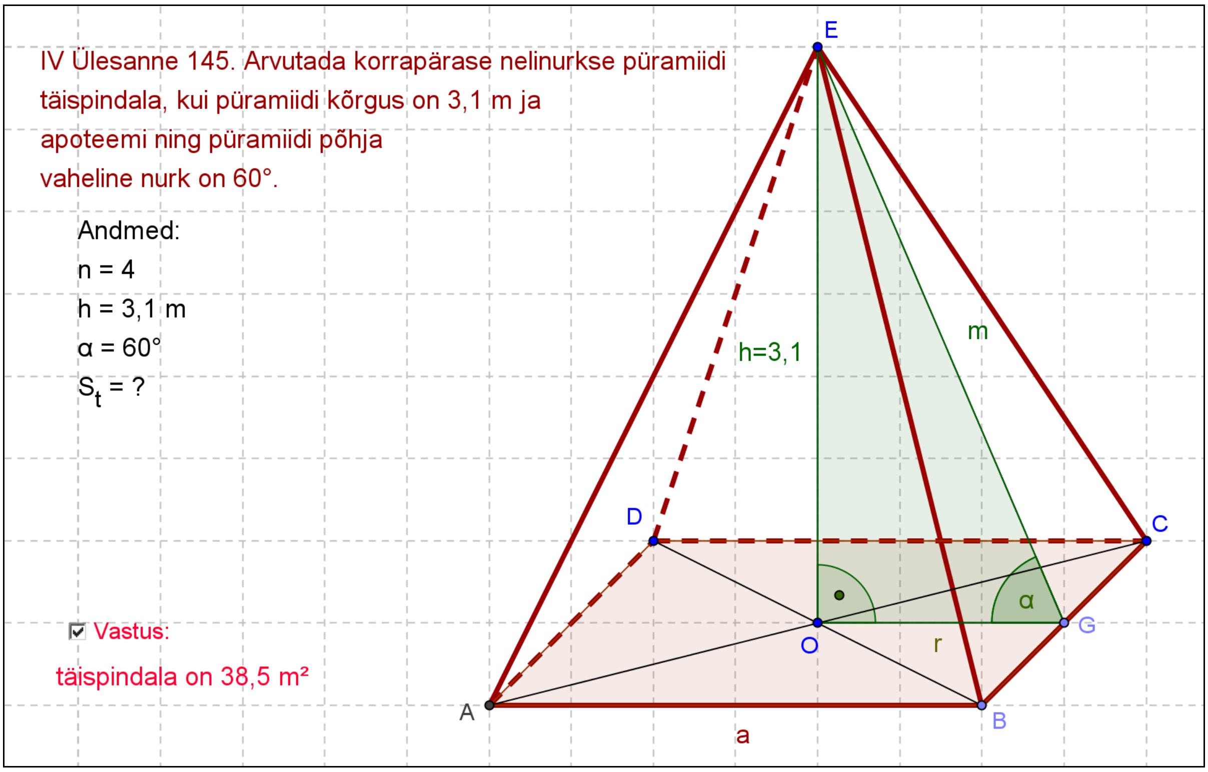
Põhja pindala $S_p = \frac{6*1*\sqrt{3}}{2*2} = 1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}598$ (cm²)

Ruumala $V = 1{,}5\sqrt{3} * 1 = 1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}60$ (cm³)

Lisaks leia 1) külgpindala (6 cm²)

2) täispindala ($6 + 3\sqrt{3} \approx 11{,}2$ cm²)

Näide 2.



Püramiidi täispindala valem on $S_t = S_k + S_p$, kus $S_k = \frac{nam}{2}$ ja $S_p = a^2$. Vaja on täisnurksest kolmnurgast EOG leida nii m kui ka r, sest ruudukujulise põhja korral a = 2r.

$$\sin\alpha = \frac{h}{m} \Rightarrow m = \frac{h}{\sin\alpha} \Rightarrow m = \frac{3{,}1}{\sin 60^o} = 3{,}580 \text{ (m)}$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow r = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{3{,}1}{\tan 60^o} = 1{,}790 \text{ (m) ja a =2*1,79 = 3,58 (m)}$$

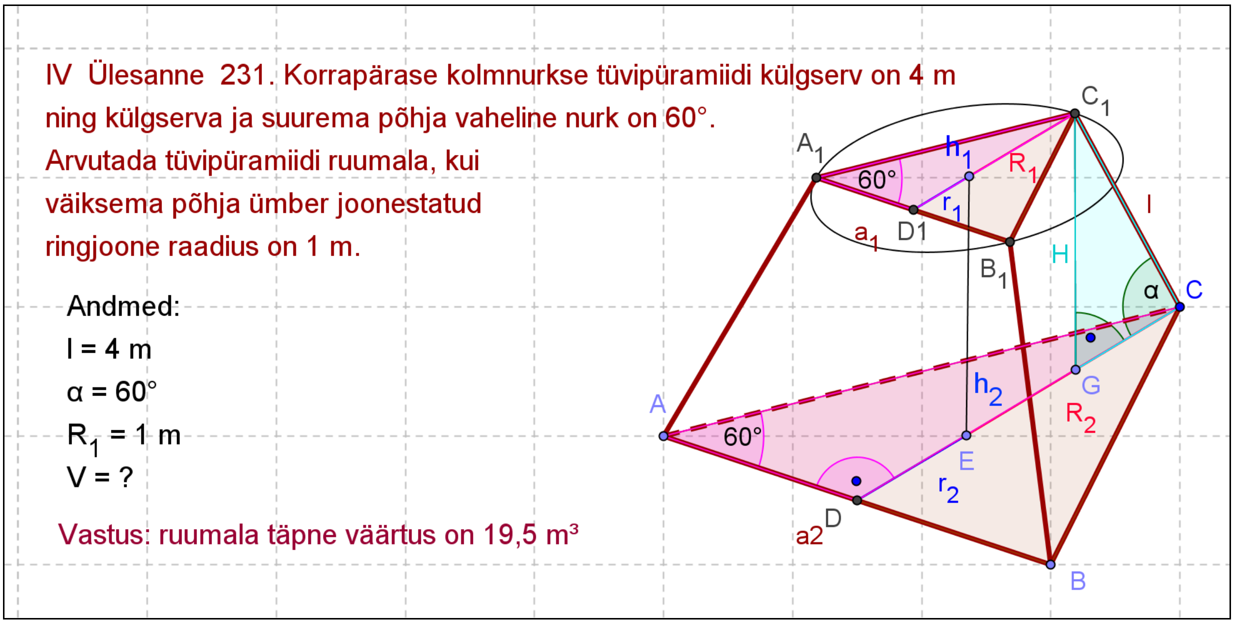
Külgpindala $S_k = \frac{4*3{,}58*3{,}58}{2} = 25{,}63$ (cm²)

Põhja pindala $S_p = 3{,}58^2 = 12{,}82$ (cm²)

Täispindala $S_t = 25{,}63 + 12{,}82 \approx 38{,}5$ (cm²).

Lisaks leia püramiidi ruumala (13,2 m³)

Näide 3.



Tüvipüramiidi ruunala valem on $V = \frac{H}{3}(Sp_1 + \sqrt{Sp_1 * Sp_2} + Sp_2)$. Vaja on leida püramiidi kõrgus H ja põhjade pindalad Sp_1 ja Sp_2. Põhjade pindalade arvutamisel kasutame kolmnurga pindala valemit $S_{kolmnurk} = \frac{a*h}{2}$.

Täisnurksest kolmnurgast C_1GC leiame püramiidi kõrguse H:

$\sin\alpha = \frac{H}{l} \Rightarrow H = l * \sin\alpha \Rightarrow H = 4 * \sin 60^o = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$ (m).

Et R_1 on kaks korda pikem põhja apoteemist r_1 siis $r_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (m) ja

väiksema põhja kõrgus $h_1 = R_1 + r_1 \Rightarrow h_1 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ (m).

Täisnurksest kolmnurgast $A_1D_1C_1$ $\sin 60^o = \frac{h_1}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{h_1}{\sin 60^o} = \frac{1{,}5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ (m)

Väiksema põhja pindala $Sp_1 = \frac{a_1 * h_1}{2} = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}299$ (m²)

Kolmnurgast C_1GC $\cos\alpha = \frac{GC}{l} \Rightarrow GC = 4 * \cos 60^o = 2$ (m).

Et $R_2 = EG + GC$ ja $EG = R_1$ ning $r_2 = \frac{R_2}{2}$ siis

suurema põhja kõrgus $h_2 = r_2 + R_2 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$ (m)

Analoogselt a_1 leidmisele leiame suurema põhiserva $a_2 = \frac{4}{\sin 60^o} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}196$ (m) ja

suurema põhja pindala $Sp_2 = \frac{4{,}4 * 3\sqrt{3}}{2} = \frac{13{,}5\sqrt{3}}{2} \approx 11{,}96$ (m²).

Ruumala $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1{,}5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{1{,}5\sqrt{3}}{2} * \frac{13{,}5\sqrt{3}}{2}} + \frac{13{,}5\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} * \frac{19{,}5\sqrt{3}}{2} = 19{,}5$ (m³)

Lisaks leia tüvipüramiidi 1) apoteem ($\sqrt{13}$ m)

2) külgpindala ($8\sqrt{39} \approx 50$ m²)

3) täispindala ($7{,}5\sqrt{3} + 8\sqrt{39} \approx 63$ m²)

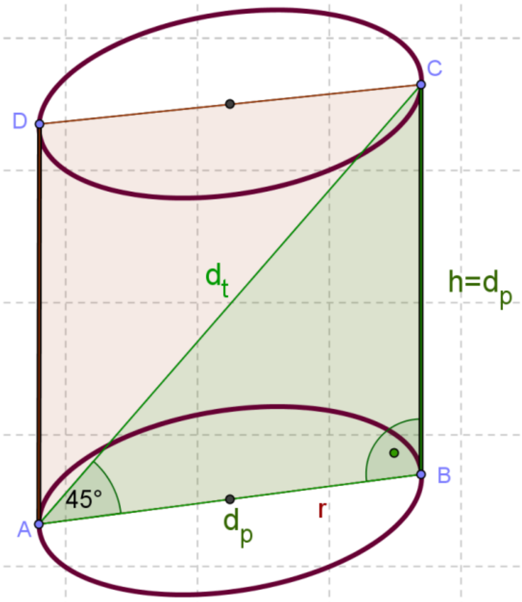
Näide 4.

IV Ül. 254. Silindri telglõige on ruut, mille diagonaal on 12 cm. Arvutada silindri täispindala.

Andmed;
d_t = 12 cm
d_p = h
S_t = ?

☑ Vastus:

täispindala täpne väärtus on 108π cm² ja ligikaudne väärtus 339 cm²



Kuna ruudukujulise telglõike $AC = d_t$ jaotab selle kaheks võrdhaarseks täisnurkseks kolmnurgaks siis $\sin 45^o = \frac{h}{d_t} \Rightarrow h = 12 * \sin 45^0 = 6\sqrt{2} \approx 8{,}485$ (cm).

Et silindri diameeter $d_p = h = 6\sqrt{2}$ ja $r = \frac{d_p}{2}$ siis silindri raadius $r = 3\sqrt{2} \approx 4{,}243$ (cm).

Silindri külgpindala $S_k = 2\pi r * h \Rightarrow S_k = 2\pi * 3\sqrt{2} * 6\sqrt{2} = 72\pi \approx 226{,}2$ (cm²)

Silindri põhja pindala $S_p = \pi r^2 \Rightarrow S_p = \pi(3\sqrt{2})^2 = 18\pi \approx 5{,}655$ (cm²)

Silindri täispindala $S_t = S_k + 2S_p \Rightarrow S_t = 72\pi + 2 * 18\pi = 108\pi \approx 339$ (cm²).

Lisaks leia 1) silindri ruumala ($108\sqrt{2}\pi \approx 480$ cm³)
2) telglõike pindala (72 cm²)

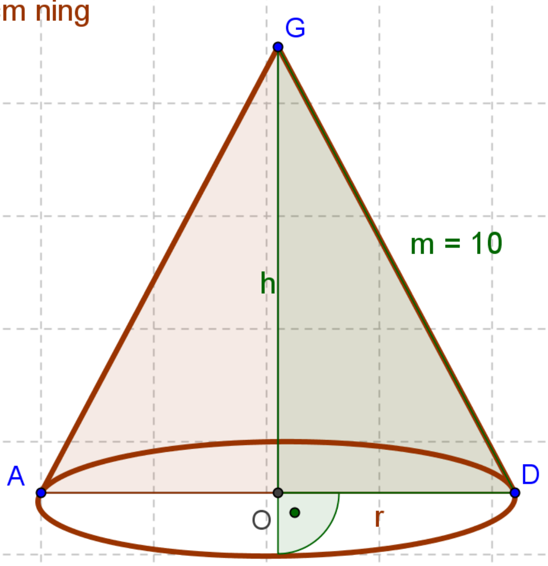
Näide 5.

IV Ül.300. Koonuse moodustaja on 10 cm ning põhja ümbermõõt 12π cm. Arvutada koonuse ruumala.

Andmed:
m = 10 cm
P = 12π cm
V = ?

☑ Vastus:

ruumala täpne väärtus on 96π cm³ ja ligikaudne väärtus 302 cm³



Et põhja ümbermõõt P = 2πr ja P = 12π, saame raadiuse r suhtes võrrandi

$$2\pi r = 12\pi \Rightarrow r = \frac{12\pi}{2\pi} = 6 \text{ (cm)}$$

Täisnurksest kolmnurgast GOD Pythagorase teoreemi põhjal $h^2 + r^2 = m^2$, millest koonuse kõrgus $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ (cm)

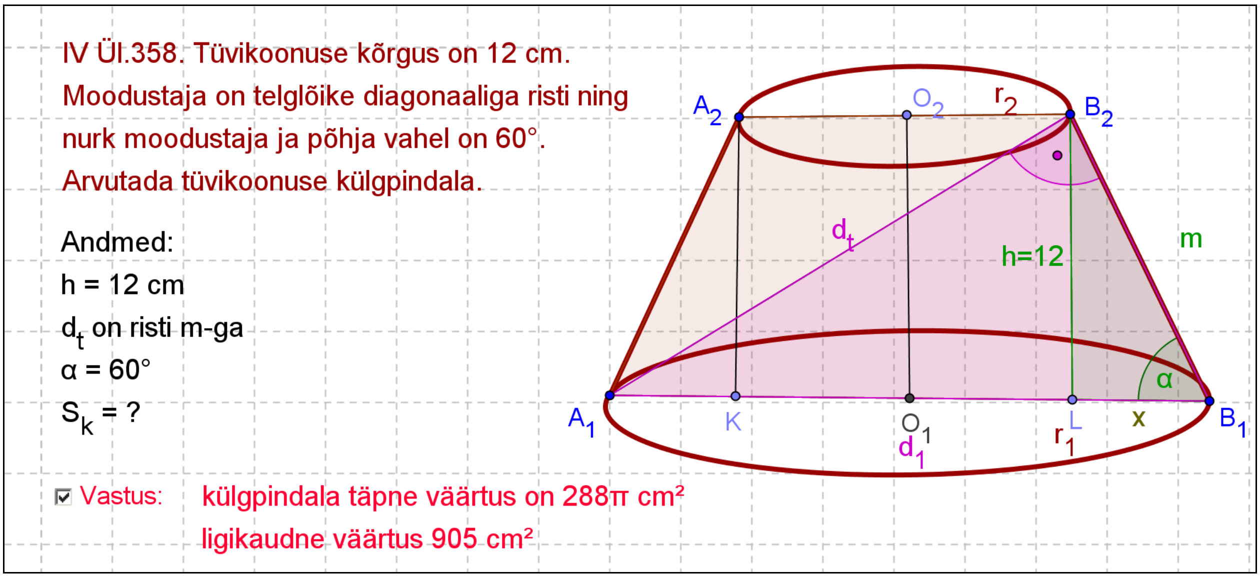
Koonuse ruumala $V = \frac{1}{3} S_p * h = \frac{1}{3} * \pi r^2 * h \Rightarrow V = \frac{1}{3} * \pi * 6^2 * 8 = 96\pi \approx 302$ (cm³).

Lisaks leia 1) koonuse külgpindala (60π = 188 cm²)

2) koonuse täispindala (96π = 302 cm²)

3) koonuse telglõike pindala (48 cm²)

Näide 6.



Tüvikoonuse külgpindala valem on $S_k = \pi(r_1 + r_2)m$.

Vaja on leida tüvikoonuse moodustaja m ja põhjade raadiused r_1 ja r_2.

Täisnurksest kolmnurgast B_2LB_1 $\sin\alpha = \frac{h}{m}$,millest moodustaja $m = \frac{12}{\sin 60^o} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ (cm)

ja samast kolmnurgast $\cos\alpha = \frac{x}{m} \Rightarrow x = 8\sqrt{3} * \cos 60^o = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ (cm).

Täisnurksest kolmnurgast $A_1B_1B_2$ $\cos\alpha = \frac{m}{d_1}$, millest suurema põhja diagonaal

$$d_1 = \frac{8\sqrt{3}}{\cos 60^o} = 16\sqrt{3} \approx 27{,}71 \text{ (cm) ning raadius } r_1 = \frac{d_1}{2} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ (cm).}$$

Väiksema põhja raadius $r_2 = O_1L$, mis on r_1-st x-i võrra lühem. Seega

$r_2 = r_2 - x = 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ (cm)

Tüvikoonuse külgpindala $S_k = \pi(8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) * 8\sqrt{3} = 288\pi \approx 905$ (cm²).

Lisaks leia1) täispindala (528π = 1660 cm²)

2) ruumala (1344π = 4220 cm³)

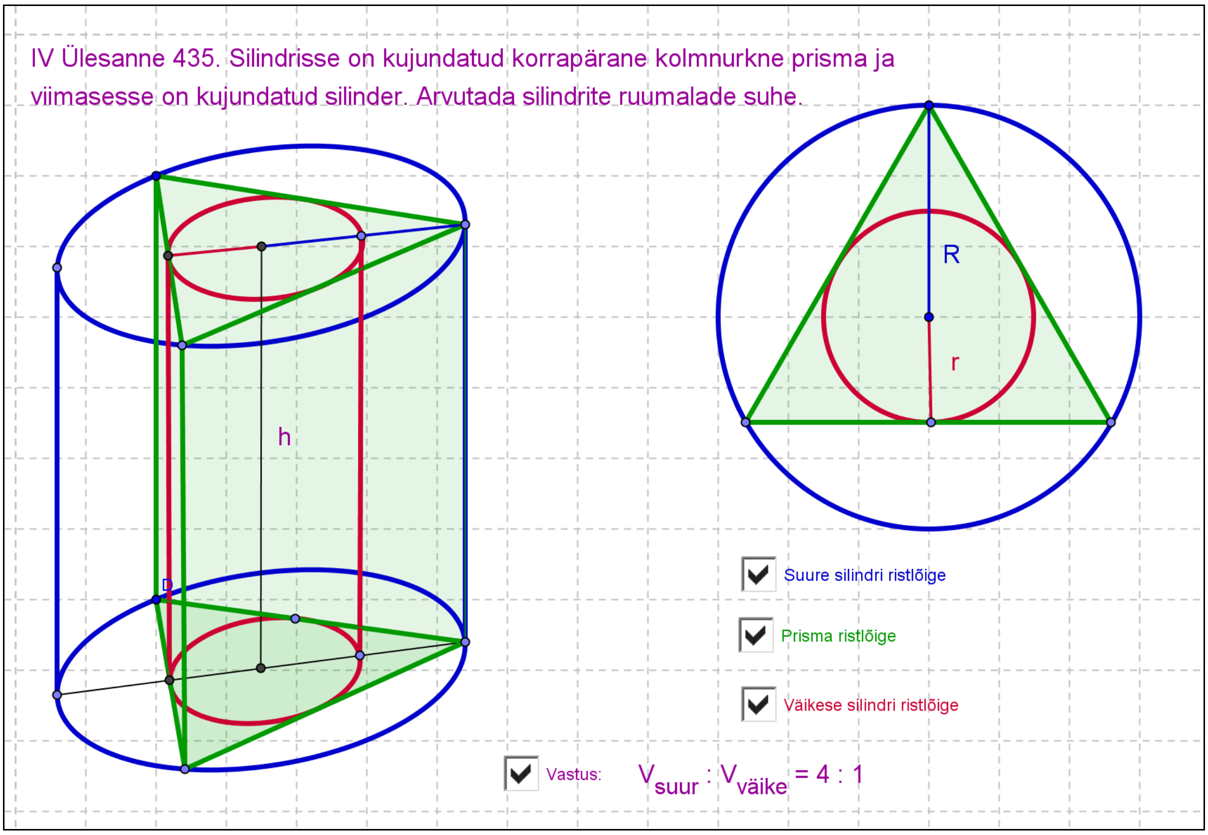
Näide 7.

Kuna prisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk (Ül.435), siis selle nii sise- kui ka ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga mediaanide lõikepunktis. Mediaanide lõikepunkt aga jaotab mediaanid suhtes 2 : 1 alates tipust. Seega R = 2r.

Suure silindri ruumala avaldub valemiga $V_{suur} = \pi R^2 * h = \pi(2r)^2 * h = 4\pi r^2 * h$

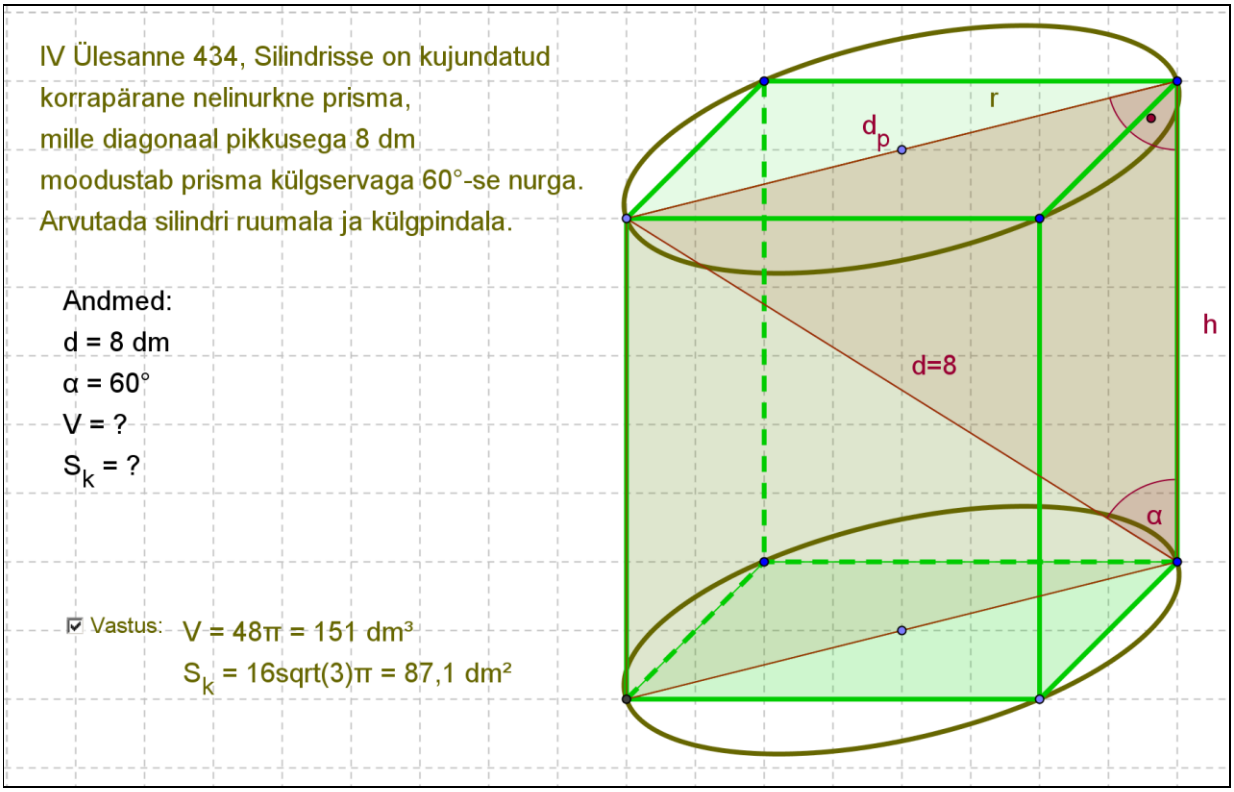
Väikese silindri ruumala avaldub valemiga $V_{väike} = \pi r^2 * h$.

Jagatis $\frac{V_{suur}}{V_{väike}} = \frac{4\pi r^2 * h}{\pi r^2 * h} = 4$.



Lisaks arvuta silindrite külgpindalade suhe (2 : 1)

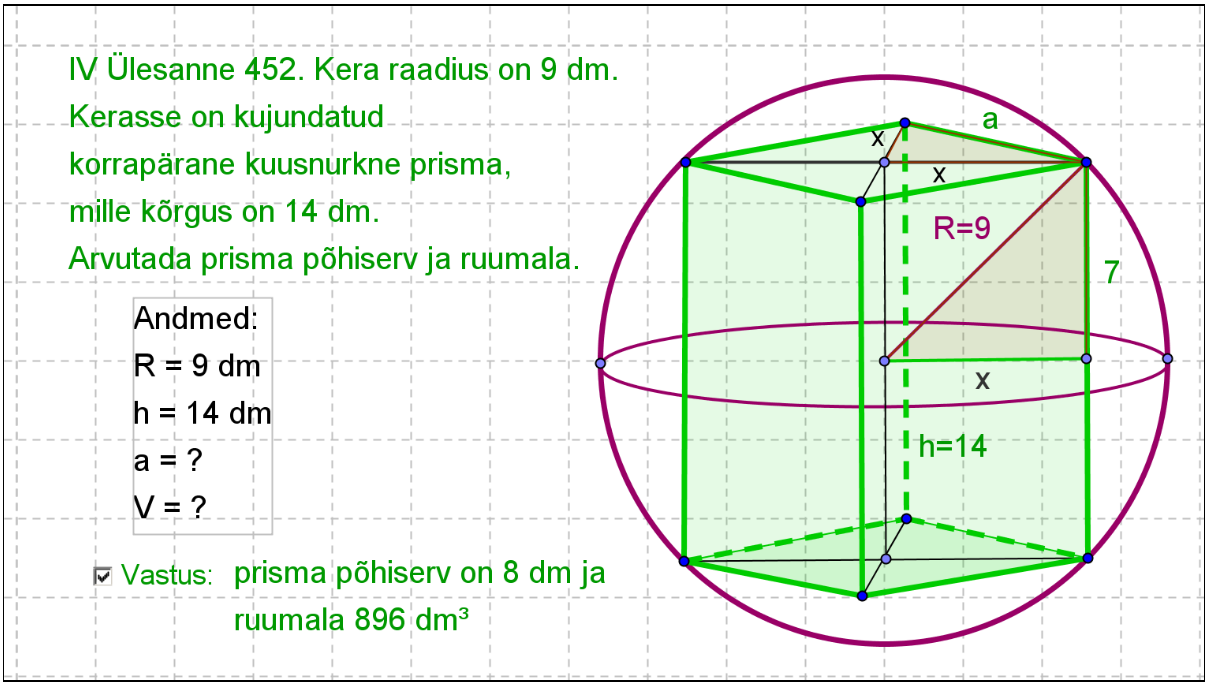
Näide 8.



Täisnurksest kolmnurgast leiame nii prisma kui ka silindri kõrguse ja põhja diameetri (arvuta iseseisvalt) h = 4 dm ja $d_p = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ dm ning silindri raadius $r = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$ dm.
Silindri põhja pindala $S_p = 12\pi$ dm² ja ruumala $V = 48\pi \approx 141$ dm³ ning külgpindala $S_k = 16\sqrt{3}\pi \approx 87{,}1$ dm².

Lisaks leia 1) silindri täispindala ($\pi(16\sqrt{3}+24) \approx 162$ dm²)
2) prisma põhiserv ($2\sqrt{6} \approx 4{,}899$ dm)
3) prisma külgpindala ($32\sqrt{6} \approx 78{,}38$ dm²)
4) prisma põhja pindala (24 dm²)
5) prisma täispindala ($32\sqrt{6}+48 \approx 126$ dm²)
6) prisma ruumala (96 dm³)

Näide 9.



Prisma sees paiknevast täisnurksest kolmnurgast leiame poole prisma põhja diagonaalist (leia iseseisvalt) $x = 4\sqrt{2} \approx 5{,}657$ dm. Prisma ülemisel tahul paiknevast täisnurksest kolmnurgast leiame prisma põhiserva a = 8 dm. Prisma põhja pindala $S_p = 64$ dm² ja V = 896 dm³.

Lisaks leia 1) prisma külgpindala (448 dm²)
2) prisma täispindala (576 dm²)
3) kera pindala (324π dm²)
4) kera ruumala (972π = 3054 dm³)
5) mitu % moodustab prisma ruumala kera ruumalast? (29%)

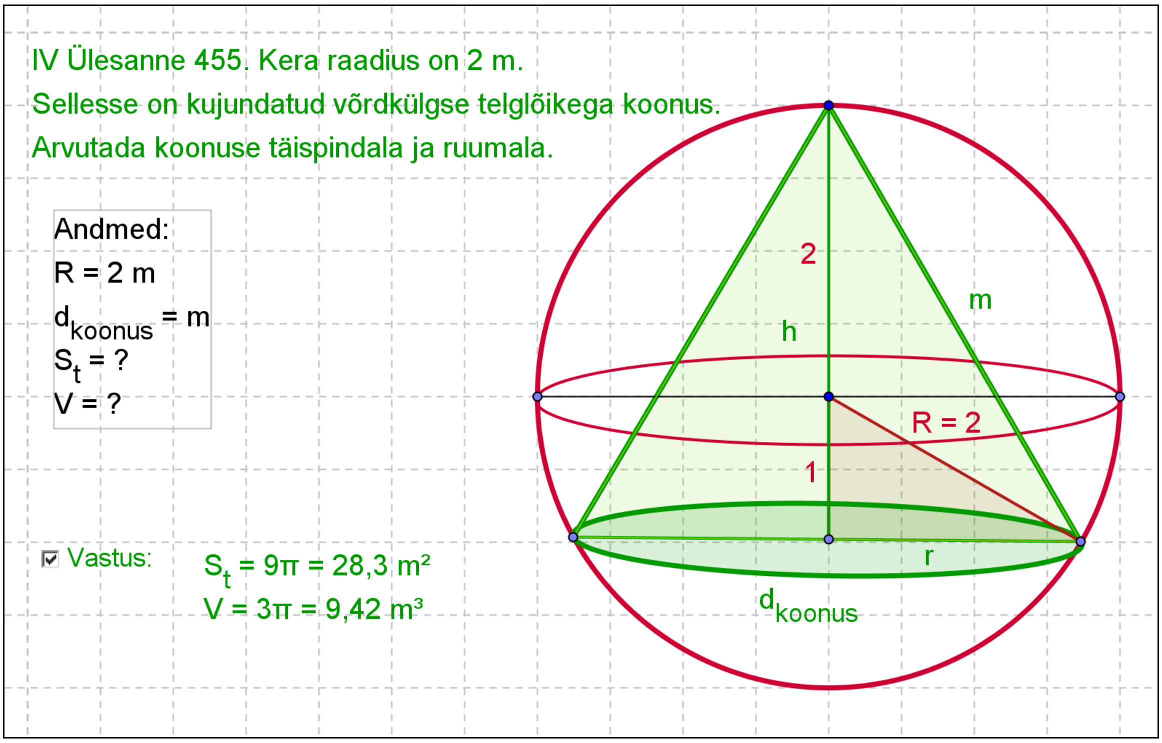
Näide 10.

Et võrdkülgse kolmnurga (Ül.455) ümberringjoone keskpunkt on mediaanide lõikepunktis, siis koonuse kõrgus h = 2+1 = 3 (m). Pythagorase teoreemi põhjal
koonuse raadius $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (m).

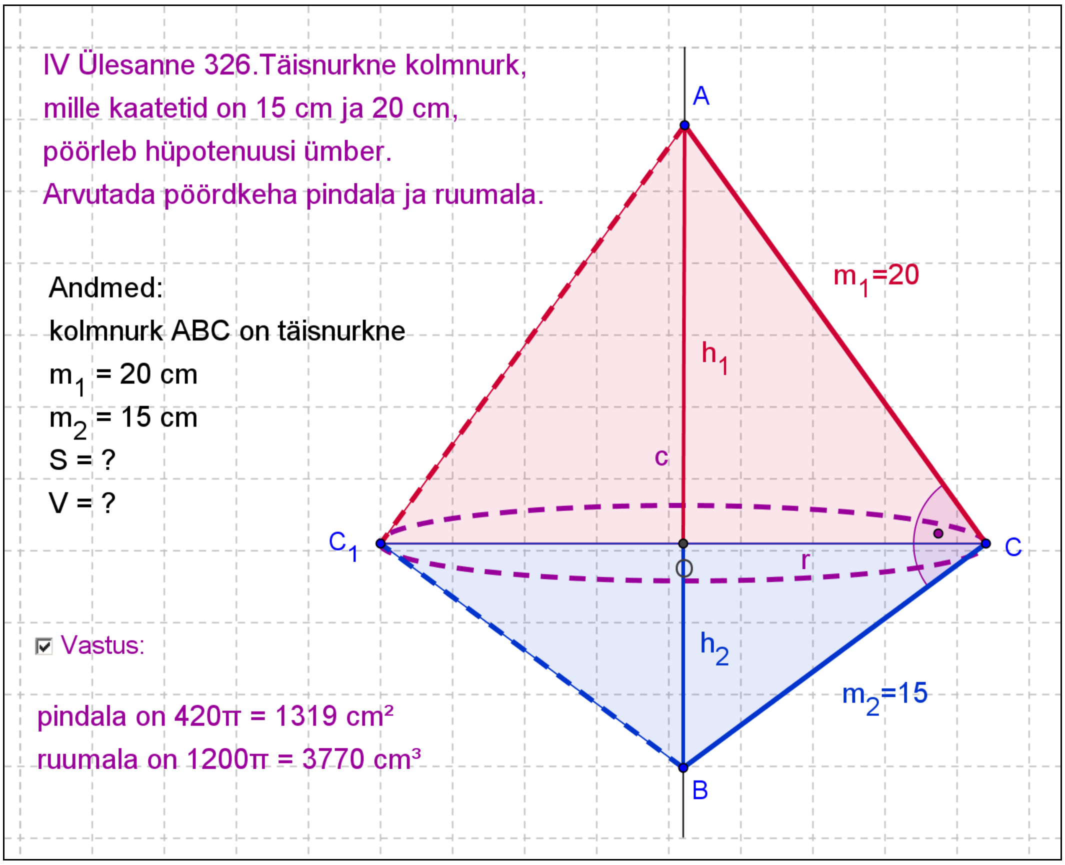
Koonuse põhja pindala $S_p = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$ (m²) ja ruumala $V = \frac{1}{3} * 3\pi * 3 = 3\pi \approx 9{,}42$ (m³).

Kui koonuse raadius $r = \sqrt{3}$ siis diameeter $d_{koonus} = 2\sqrt{3}$ ja ka moodustaja $m = 2\sqrt{3}$ (m).
Koonuse külgpindala $S_k = \pi * \sqrt{3} * 2\sqrt{3} = 6\pi \approx 18{,}8$ (m²) ja täispindala
$S_t = 6\pi + 3\pi = 9\pi \approx 28{,}3$ (m²).

Lisaks leia 1) kera suurringi pindala (4π = 12,6 m²)
2) kera pindala (16π = 50,3 m²)
3) kera ruumala (32π/3 = 33,5 m³)



Näide 11.



Pöörlemisel tekib kaks ühise põhjaga koonust.
Täisnurkses kolmnurgas ABC Pythagorase teoreemi põhjal leiame hüpotenuusi pikkuse $c^2 = 20^2 + 15^2 = 625 \Rightarrow c = 25$ (cm). Eukleidese teoreemi põhjal leiame kaateti m_1 projektsiooni h_1 järgmiselt: $m_1^{\ 2} = h_1 * c \Rightarrow h_1 = \frac{m_1^{\ 2}}{c} = \frac{20^2}{25} = 16$ (cm).
Hüpotenuusist teine osa $h_2 = 25 - 16 = 9$ (cm). Pöördkeha raadiuse leiame kolmnurgas AOC Pythagorase teoreemi põhjal $r^2 = 20^2 - 16^2 = 144 \Rightarrow r = \sqrt{144} = 12$ (cm).
Pöördkeha pindala koosneb kahe koonuse külgpindalade $S_{k1} = \pi r m_1$ ja $S_{k2} = \pi r m_2$ summast.
$S = \pi r m_1 + \pi r m_2 = \pi r(m_1 + m_2) \Rightarrow S = \pi * 12(20 + 15) = 420\pi \approx 1319$ (cm²).
Analoogselt leiame pöördkeha ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi * 12^2(16 + 9) = 1200\pi \approx 3770 \ \text{(cm³)}$$