TARTU ÜLIKOOL
TEADUSKOOL

HULKTAHUKAD

Õppematerjal TÜ Teaduskooli õpilastele

Koostanud L. Tuulmets ja K. Koitmets

Saateks

Käesolev brošüür "Hulktahukad" on mõeldud TÜ Teaduskooli õpilastele iseseisvaks tööks.

Brošüüri "Hulktahukad" teoreetiline osa koosneb kolmest peatükist.

Esimesele peatükile eelneb lühike sissejuhatus, milles antakse mõned soovitused geomeetriaülesannete lahendamiseks. Esimeses peatükis "Hulktahukad" defineeritakse hulknurk ja hulktahukas ja mõisted, mis on seotud hulktahukate ja hulknurkadega.

Teises peatükis "Prisma" defineeritakse prisma, tutvustatakse prisma eriliike ja antakse valemid prisma pindala ja ruumala arvutamiseks.

Kolmandas peatükis "Püramiid" antakse püramiidi definitsioon ning valemid pindala ja ruumala arvutamiseks, tutvustatakse prisma eriliike.

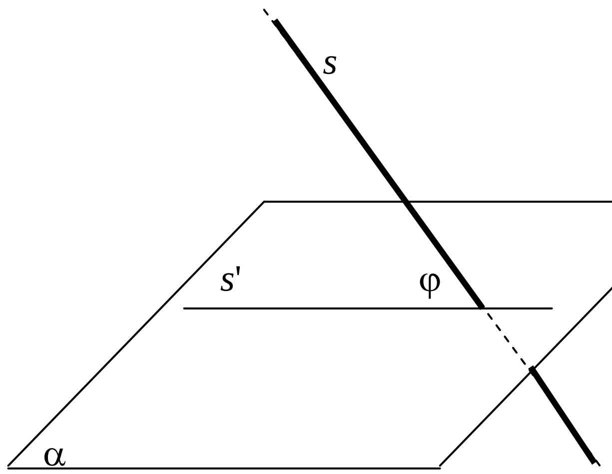
Sissejuhatus

Esitame mõningaid soovitusi geomeetriaülesannete lahendamiseks.

Geomeetriaülesannete lahendamine algab tavaliselt joonise tegemisest. Joonis on soovitav teha võimalikult näitlik ja küllalt suur. Selleks, et lahendus korrektselt vormistada, on soovitav proovida mustandil, millise nurga all keha kujutada, kuidas näitlikumalt teha lõige jne. Seejuures tuleb arvestada joonte nähtavust: mittenähtavad elemendid kujutame katkendliku joonega. Kui ruumilise kujundi joonise korral etendab erilist osa mingi tasandiline lõige, siis on soovitav teha eraldi kõrvale selle lõike joonis.

Tuleb meeles pidada, et joonise tegemisel, kasutades paralleelprojektsiooni, muutuvad keha mõõtmed ja nurgad, kuid sirgete paralleelsus jääb. Kui punkt jaotab mingi lõigu suhtes $m : n$, siis punkti projektsioon jaotab lõigu samuti suhtes $m : n$. Erijuhul täisnurkse kolmnurga projektsioon ei pea olema täisnurkne kolmnurk, võrdkülgse kolmnurga projektsioon ei pea olema võrdkülgne kolmnurk, rööpküliku projektsioon on aga rööpkülik.

Nurgaks sirge s ja tasandi α vahel nimetatakse väikseimat nurka φ sirge s ja tema ristprojektsiooni s' vahel tasandil α (joonis 1).

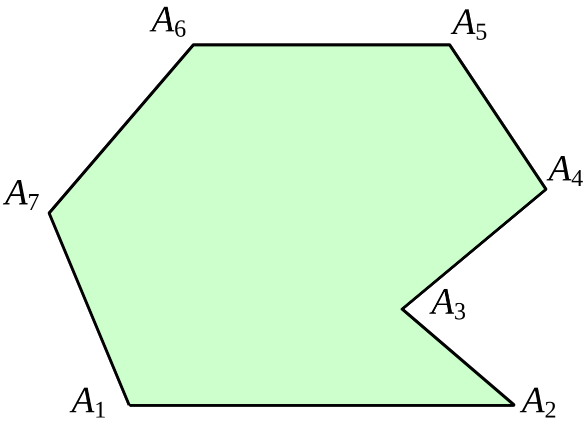


Joonis 1

Sirge on risti tasandiga, kui ta on risti kahe tasandil asuva suvalise mitteparalleelse sirgega.

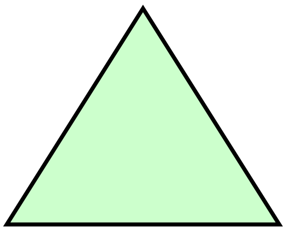
Kui vektor on risti kahe lõikuva tasandiga, siis on ta risti nende tasandite lõikesirgega.

I peatükk
HULKTAHUKAD



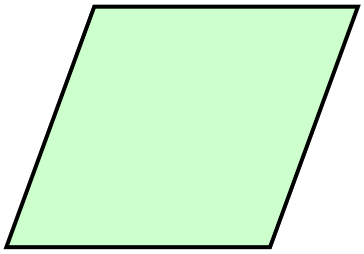
Hulkkülikuks $A_1A_2A_3...A_n$ nimetatakse kujundit, mis koosneb punktidest A_1, A_2, ..., A_n ja neid punkte ühendavatest lõikudest A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1 (joonis 2, antud juhul $n = 7$).
Hulkkülikud on näiteks kolmkülik (joonis 3), ristkülik (joonis 4), rööpkülik (joonis 5).

Joonis 2



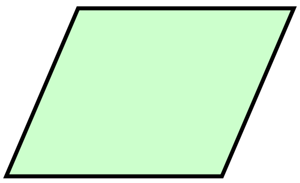
kolmkülik
Joonis 3

ristkülik
Joonis 4



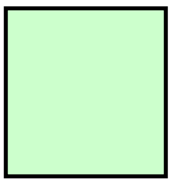
rööpkülik
Joonis 5

Tasandi osa, mida piirab hulkkülik, nimetatakse **hulknurgaks**.
Punkte A_1, A_2, ..., A_n nimetatakse hulknurga **tippudeks**.
Sirglõike A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1 hulknurga **külgedeks**.
Sirget, mis läbib hulknurga külge nimetatakse **külgsirgeks**.
Hulknurka nimetatakse **kumeraks**, kui ta asub ühel pool iga oma külgsirget. Edaspidi käsitleme ainult kumeraid hulknurki. Kumerat hulknurka, mille kõik küljed ja sisenurgad on võrdsed (kongruentsed), nimetatakse **korrapäraseks hulknurgaks**.
Hulknurki nimetatakse vastavalt külgede arvu järgi kolmnurkadeks, nelinurkadeks, viisnurkadeks jne.
Kumeratel nelinurkadel on järgmised eriliigid: **rööpkülik, ristkülik, ruut, romb, trapets** (vt joonised 6 – 10).

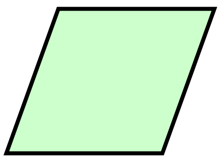


rööpkülik
joonis 6

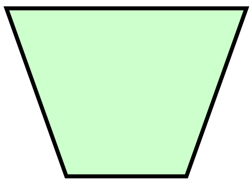
ristkülik
joonis 7



ruut
joonis 8

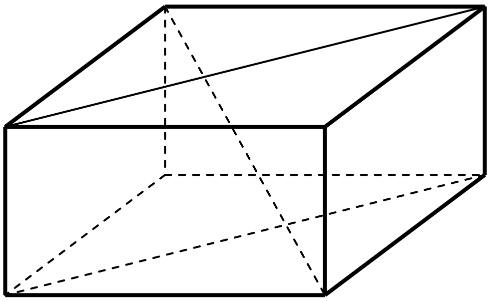


romb
joonis 9



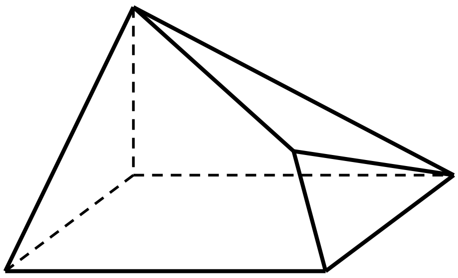
trapets
joonis 10

Geomeetrilist keha, mida piiravad ainult hulknurgad, nimetatakse **hulktahukaks.** Hulktahukat piiravaid hulknurki nimetatakse **hulktahuka tahkudeks**, hulknurkade tippe hulktahuka **tippudeks** ja hulknurkade külgi hulktahuka **servadeks**. Sirget, mis läbib hulktahuka serva, nimetatakse **servsirgeks**. Hulktahuka eri tahkudel olevaid tippe ühendavaid sirglõike nimetatakse **diagonaallõikudeks**. Edaspidi kasutame *diagonaallõikude* asemel lihtsalt terminit *diagonaal*. Sirget, mis läbib diagonaali, nimetame **diagonaalsirgeks**. Tasandit, mis läbib kolme mitte ühele tahule kuuluvat tippu, nimetatakse **diagonaaltasandiks**. Hulktahuka ja tema diagonaaltasandi ühisosa nimetatakse hulktahuka **diagonaallõikeks** (joonis 11). *Koolimatemaatikas mõeldakse prisma diagonaaltasandi all ikka endiselt tasandit, mis läbib kaht mitte ühele tahule kuuluvat serva, seda tuleb aluseks võtta ka siinsete ülesannete lahendamisel.*

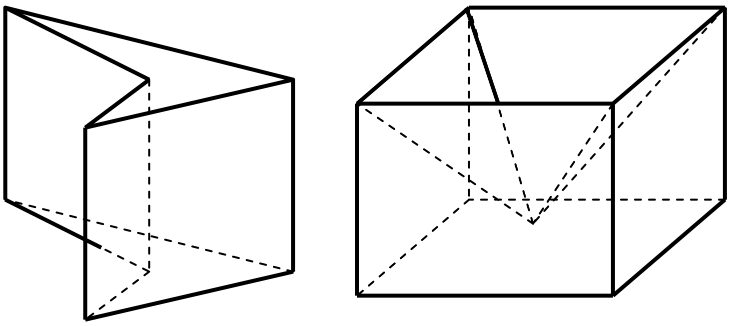


Joonis 11

Hulktahukat nimetatakse **kumeraks**, kui ta asub ühel pool iga oma tahu tasandit. Kumerust võib defineerida ka järgnevalt: hulktahukat nimetatakse kumeraks, kui iga tema kahte punkti ühendav sirglõik jääb tervenisti hulktahuka sisse (joonis 12).



kumer
Joonis 12

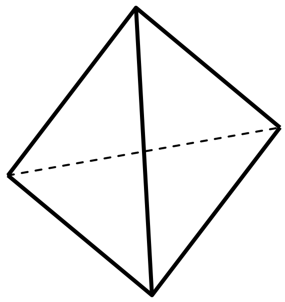


mittekumerad
Joonis 13

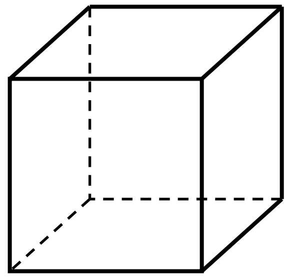
Edaspidi käsitleme ainult kumeraid hulktahukaid.

Kumerat hulktahukat, mille kõik tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad ja igast tipust väljub võrdne arv servi, nimetatakse **regulaarseks hulktahukaks**. Regulaarseid hulktahukaid on viit tüüpi. Neid kirjeldavad järgnev tabel ja kolme esimest ka joonised 14 – 16.

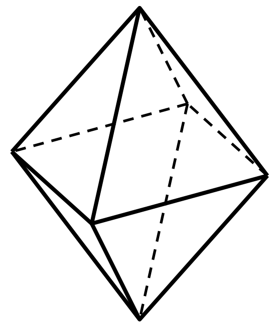
	tahu kuju	tahkude arv	servade arv	tippude arv
regulaarne ehk korrapärane tetraeeder (joonis 14)	võrdkülgne kolmnurk	4	6	4
kuup (joonis 15)	ruut	6	12	8
regulaarne oktaeeder (joonis 16)	võrdkülgne kolmnurk	8	12	6
regulaarne dodekaeeder	korrapärane viisnurk	12	30	20
regulaarne ikosaeeder	võrdkülgne kolmnurk	20	30	12



Regulaarne tetraeeder
ehk 4-tahukas
Joonis 14



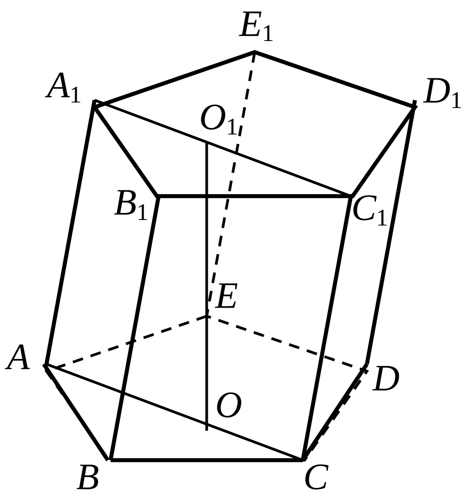
Regulaarne heksaeeder
ehk kuup ehk 6-tahukas
Joonis 15



Regulaarne oktaeeder
ehk 8-tahukas
Joonis 16

Käesolevas brošüüris vaatleme ainult kahte liiki hulktahukaid – prismat ja püramiidi.

II peatükk
PRISMA



Joonis 17

Prismaks nimetatakse hulktahukat, mille kaks tahku (põhjad) on vastavalt võrdsete ja paralleelsete külgedega hulknurgad ja ülejäänud tahud (külgtahud) on rööpkülikud, milledel on kummagi hulknurgaga üks ühine külg (joonis 17).

Tahke *ABCDE* ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ nimetatakse prisma **põhitahkudeks** ehk **põhjadeks**, ülejäänud tahke prisma **külgtahkudeks**.

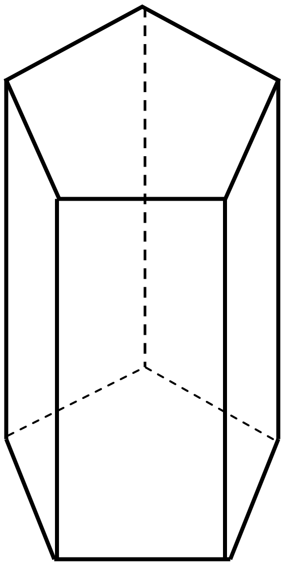
Lõigud *AB*, *BC*, ...,E_1A_1 on prisma **põhiservad**, lõigud $AA_1 = BB_1 = ... = EE_1$ **külgservad.**

Lõiku, mis ühendab prisma kahte mitte ühele tahule kuuluvat tippu, nimetatakse prisma **diagonaaliks** (joonisel lõigud AC_1 jne). Tasandit, mis läbib kaht mitte ühele tahule kuuluvat serva, nimetatakse prisma **diagonaaltasandiks** (joonisel ACC_1A_1). Põhjade vahelist kaugust nimetatakse prisma **kõrguseks** (joonisel OO_1).

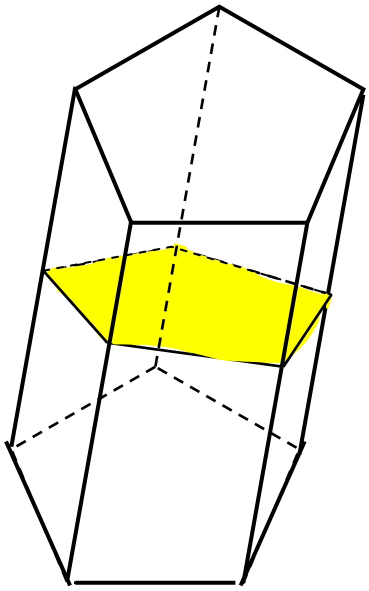
Püstprismaks nimetatakse prismat, mille külgservad on põhjadega risti. Püstprisma külgtahkudeks on seega ristkülikud (vt joonis 18).

Kaldprismaks nimetatakse prismat, mille külgservad ei ole põhjadega risti (vt joonis 19).

Korrapäraseks prismaks nimetatakse püstprismat, mille põhi on korrapärane hulknurk. Näiteks : korrapärane nelinurkne prisma on risttahukas, mille põhitahud on ruudud.



Püstprisma
Joonis 18



Kaldprisma
Joonis 19

Prismasid liigitatakse vastavalt põhjadeks olevate hulknurkade järgi kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. Igal n –nurksel prismal (n > 3) on n + 2 tahku, 2n tippu, 3n serva, $n(n-3)$ diagonaali ja $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonaaltasapinda.

Prisma külgtahkude pindalade summat nimetatakse **prisma külgpindalaks** $\boldsymbol{S_k}$ ja kõigi tahkude pindalade summat **prisma täispindalaks** $\boldsymbol{S_t}$**.** Prisma põhja pindala ja kõrguse märkimiseks kasutame tähiseid $\boldsymbol{S_p}$ ja $\boldsymbol{h}$.

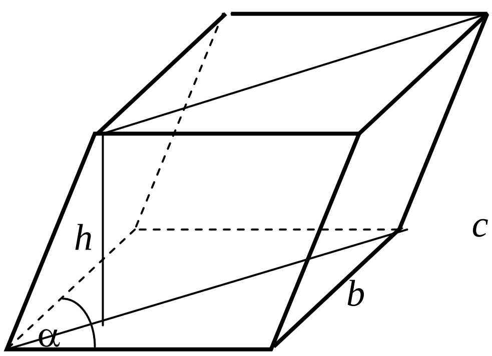
Prisma ristlõikeks nimetatakse prisma külgservadega ristuva tasandi ja prisma lõiget (vt joonis 19). Prisma külgpindala võrdub ristlõike ümbermõõdu $\boldsymbol{P}$ ja serva $\boldsymbol{l}$ korrutisega $\boldsymbol{S_k = P \cdot l}$, seega püstprisma külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu $\boldsymbol{P}$ ja prisma kõrguse $\boldsymbol{h}$ korrutisega $\boldsymbol{S_k = P \cdot h}$.

Täispindala on külgpindala ja kahe põhja pindala summa $\boldsymbol{S_t = S_k + 2S_p}$.

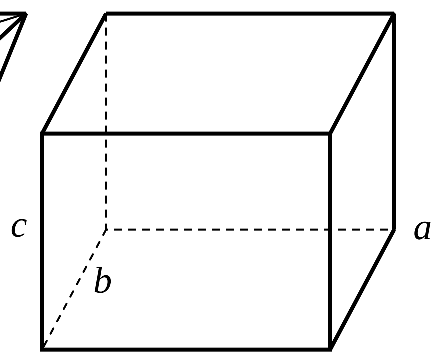
Prisma ruumala võrdub üldjuhul ristlõike S_r pindala ja külgserva l korrutisega
$\boldsymbol{V = S_r \cdot l}$, kus S_r on ristlõike pindala.

Püstprisma ruumala $\boldsymbol{V = S_p \cdot h}$, kus S_p on põhja pindala.

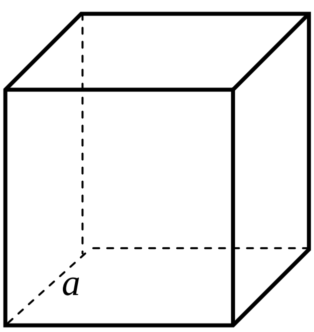
Toome näitena mõned prisma erijuhud.



Rööptahukas
Joonis 20



Risttahukas
Joonis 21



Kuup
Joonis 22

1. Rööptahukas

Prismat, mille põhi on rööpkülik, nimetatakse **rööptahukaks** (joonis 20). Üldjuhul võib põhjaks lugeda iga tema tahku.

Omadused:

a) rööptahuka vastastahud on paralleelsed,
b) rööptahuka vastastahud on võrdsed,
c) rööptahuka diagonaalid poolitavad teineteist.

Püströöptahuka pindalade ja ruumala leidmiseks on valemid:

$$S_k = 2h(a + b)$$
$$S_t = 2h(a + b) + 2ab \sin\alpha$$
$$V = S_p \cdot h,$$

kus a ja b on rööptahuka põhiservad ja α nende vaheline nurk.

2. Risttahukas

Prismat, mille põhi- ja külgtahud on ristkülikud, nimetatakse **risttahukaks** (joonis 21). Kuna risttahukas on rööptahuka erijuht, siis kehtivad siin kõik rööptahuka omadused. Lisaks neile:

a) risttahuka diagonaalid on võrdsed,
b) risttahuka diagonaali ruut võrdub risttahuka kolme mõõtme ruutude summaga.

Pindala ja ruumala arvutamiseks on järgmised valemid:

$$S_t = 2\,(ab + ac + bc)$$
$$V = abc$$

3. Kuup

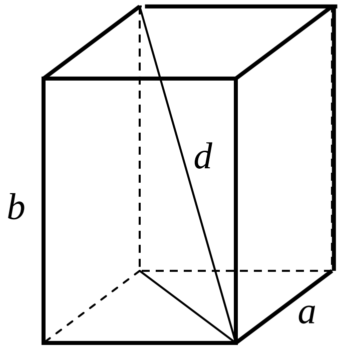
Prismat, mille põhi ja külgtahud on ruudud, nimetatakse **kuubiks** (joonis 22). Kuna kuup on omakorda risttahuka erijuht, siis kehtivad kõik risttahuka omadused. Lisaks kehtib järgmine omadus: kuubi diagonaaltasandid on risti.

Pindala ja ruumala arvutamiseks on järgmised valemid:

$$S_t = 6a^2$$
$$V = a^3,$$ kus a on kuubi serva pikkus.

<u>**Näiteid**</u>

1. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal on 9 cm ja täispindala S_t = 144 cm^2. Arvutada prisma servad.



Joonis 23

Lahendus.

Korrapärase nelinurkse prisma põhjaks on ruut (joonis 23). Tähistame ruudu külge a ja prisma kõrgust b.

Siis täispindala $S_t = 2a^2 + 4ab$ ehk $144 = 2a^2 + 4ab$.

Kasutades kaks korda Pythagorase teoreemi ja arvestades, et prisma diagonaal on 9 cm, saame teise seose: $2a^2 + b^2 = 81$.

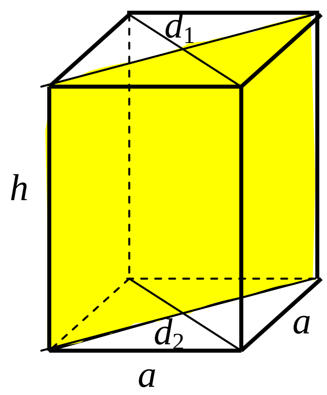
Järgnevalt tuleb lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 2a^2 + 4ab = 144 \\ 2a^2 + b^2 = 81 \end{cases},$$

esimesest võrrandist $b = \dfrac{72 - a^2}{2a}$.

Asendame saadud tulemuse teise võrrandisse, saame $2a^2 + \dfrac{(72 - a^2)^2}{4a^2} = 81$. Selle teisendamisel saame, et $8a^4 + 5184 - 144a^2 + a^4 = 324a^2$ ehk $a^4 - 52a^2 + 576 = 0$.
Tähistame $a^2 = x$, siis $x^2 - 52x + 576 = 0$, millest $x_1 = 16$ ja $x_2 = 36$.
Tagasi asendades saame, et $a_1 = 4$ ja $a_2 = 6$.
Leiame nüüd vastavad b väärtused.
Kui $a = 4$, siis $b = 7$;
kui $a = 6$, siis $b = 3$.
Vastus: prisma servad on kas 4 cm ja 7 cm või 6 cm ja 3 cm.

2. Püströöptahuka põhjaks on romb. Diagonaallõike pindalad on 3 dm² ja 875 cm². Leida rööptahuka külgpindala.



Joonis 24

Lahendus.
Olgu rombi külg a, diagonaalid d_1 ja d_2 ning püströöptahuka kõrgus h (joonis 24). Siis

$d_1h = 300$ ja $d_1 = \dfrac{300}{h}$ ning $d_2h = 875$ ja $d_2 = \dfrac{875}{h}$.

Kuna aga rombi diagonaalid on risti, siis kasutades Pythagorase teoreemi, saame seose:

$$a^2 = \left(\frac{300}{2h}\right)^2 + \left(\frac{875}{2h}\right)^2$$

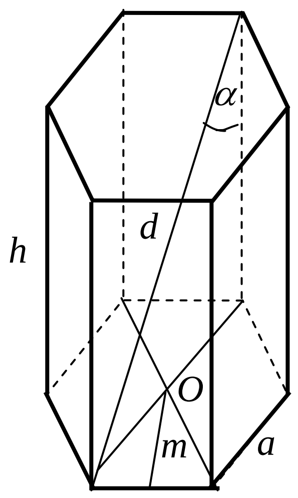
Püströöptahuka külgpindala on omakorda leitav valemiga $S_k = 4ah$.
Võrduse mõlemaid pooli võib ruutu tõsta, siis on mugavam sellesse asendada eespool saadud seos a^2 kohta:
$S_k^2 = 16a^2h^2$,

seega $S_k{}^2 = 16 \cdot \left[\left(\dfrac{300}{2h}\right)^2 + \left(\dfrac{875}{2h}\right)^2\right] \cdot h^2 = 16\left(\dfrac{150^2 + 437{,}5^2}{h^2}\right) \cdot h^2 =$

$= 16 \cdot (150^2 + 437{,}5^2) = 16 \cdot 213906{,}25$ ja $S_k = 4 \cdot 462{,}5 = 1850\, cm^2 = 18{,}5\, dm^2$

Vastus: rööptahuka külgpindala on 18,5 dm².

3. Korrapärase 6-nurkse prisma kõige pikem diagonaal d moodustab prisma külgservadega nurga α. Leida prisma ruumala.



Joonis 25

Lahendus.

Olgu prisma põhiserv a ja põhja apoteem m. Korrapärase kuusnurga pindala on $S_p = 6 \cdot \frac{am}{2} = 3am$. Pythagorase teoreemist $m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, siit $m = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ja seega $S_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

Edasi avaldame prisma põhiserva a ja kõrguse h diagonaali d ja nurga α kaudu. Et põhi on korrapärane kuusnurk, siis diagonaali d projektsioon põhjale ehk põhja diagonaal on $2a$.

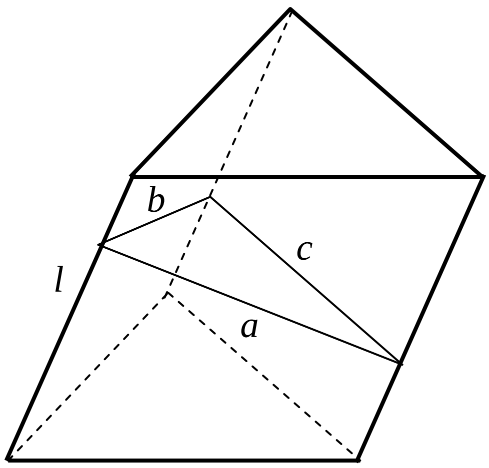
Seega $\sin\alpha = \frac{2a}{d}$, siit $a = \frac{d\sin\alpha}{2}$ ja $\cos\alpha = \frac{h}{d}$, siit $h = d\cos\alpha$.

Nüüd kasutades prisma ruumala valemit $V = S_p h$ saame, et

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot h = \frac{3\sqrt{3} \cdot d^2 \sin^2\alpha \cdot d\cos\alpha}{2 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}d^3 \sin^2\alpha\cos\alpha .$$

Vastus: prisma ruumala antud suuruste d ja α kaudu on $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}d^3 \sin^2\alpha\cos\alpha$.

4. Kolmnurkse kaldprisma külgservade vahelised kaugused on 37 cm, 15 cm ja 26 cm ning külgpindala võrdub prisma ristlõike pindalaga. Leida külgserv.



Joonis 26

Lahendus.

Prisma külgserva saame leida valemist $S_k = (a+b+c) \cdot l$, siit $l = \frac{S_k}{a+b+c} = \frac{S_k}{78}$.

Tähistame prisma ristlõike pindala sümboliga S_r.

Ülesandes oli antud, et $S_k = S_r$, kuid ristlõike pindala S_r saame me leida, kasutades Heroni valemit:

$S_r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 39$.

Arvutame ristlõike pindala:

$$S_r = \sqrt{39 \cdot (39-37) \cdot (39-26) \cdot (39-15)} = \sqrt{39 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 24} = 156 .$$

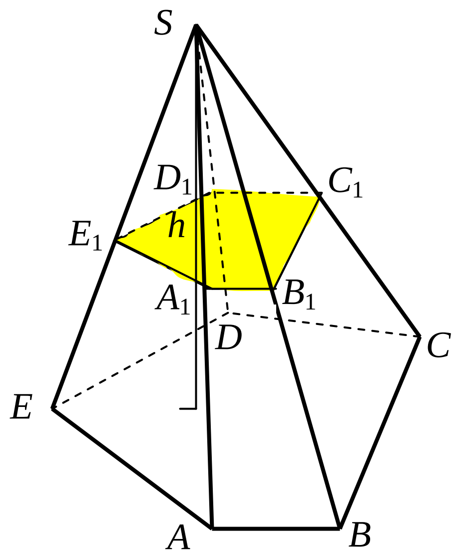
Seega $l = 156 : 78 = 2$.

Vastus: prisma külgserva pikkus on 2 cm.

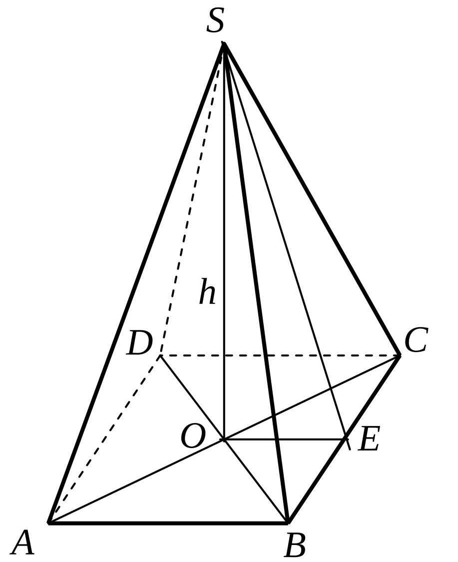
III peatükk

PÜRAMIID

Püramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk (püramiidi põhi) on mistahes kumer hulknurk ja kõik ülejäänud tahud (püramiidi külgtahud) on ühise tipuga kolmnurgad (joonised 28 ja 29).

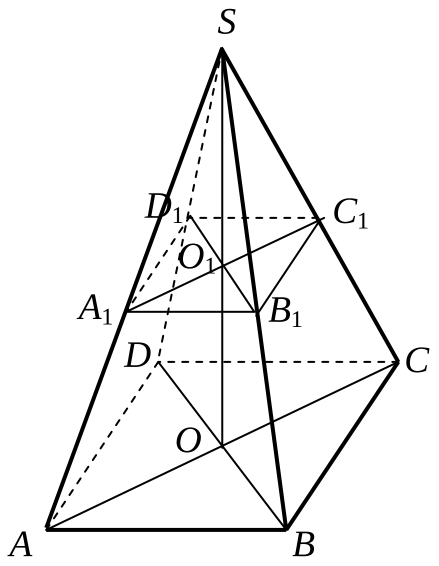


Joonis 28

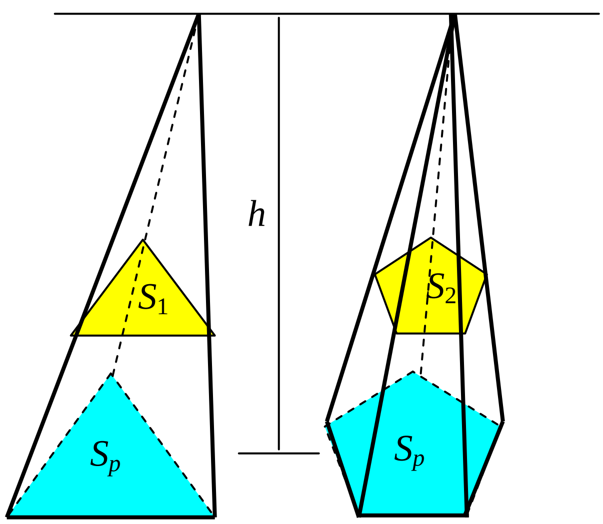


Joonis 29

Püramiidi põhja külgi (joonistel *AB*, *BC* jne) nimetatakse püramiidi **põhiservadeks** ning külgtahkude ühiseid külgi (joonistel *SA*, *SB* jne) püramiidi **külgservadeks**. Püramiidi külgtahkude ühist tippu nimetatakse püramiidi **tipuks** (joonistel punkt *S*). Püramiidi tipu kaugust põhjast (joonistel lõik *h*) nimetatakse püramiidi **kõrguseks**.
Tasandit, mis läbib püramiidi tippu ja põhja diagonaali, nimetatakse püramiidi **diagonaaltasandiks** ning selle ühisosa püramiidiga püramiidi **diagonaallõikeks** (joonisel 28 kolmnurgad *SAC*, *SBD* jne). Püramiidi, mille põhjaks on *n* –nurkne hulknurk, nimetatakse ***n* – nurkseks püramiidiks**.
Korrapäraseks püramiidiks nimetatakse püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille kõrguse alguspunkt ühtib põhja keskpunktiga (vt joonis 29).
Korrapärase püramiidi külgtahud on kongruentsed kolmnurgad. Korrapärase püramiidi tipust tõmmatud külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi **apoteemiks** (joonisel 29 lõik *SE*). Sirget, mis läbib korrapärase püramiidi tippu ja põhja keskpunkti, nimetatakse püramiidi **teljeks**.
Kolmnurkset püramiidi nimetatakse ka **tetraeedriks**. Tetraeedrit, mille põhi on võrdkülgne kolmnurk, nimetatakse **korrapäraseks tetraeedriks**. Tetraeedrit, mille kõik tahud on kongruentsed võrdkülgsed kolmnurgad aga **regulaarseks tetraeedriks**.



Joonis 30



Joonis 31

Lauseid püramiidi kohta:

1. Kui püramiidi lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis
a) külgservad ja kõrgus jaotuvad võrdelisteks osadeks (joonis 30):

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O} = const\,,$$

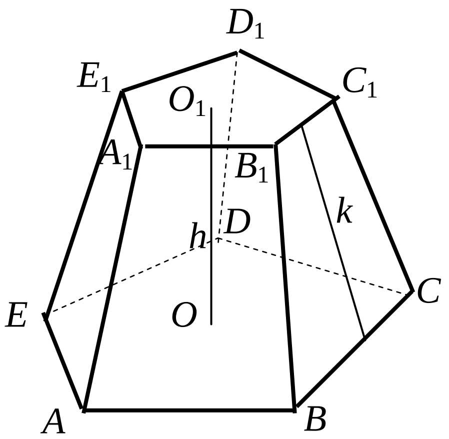
b) lõige on põhjaga sarnane hulknurk (joonisel 30 $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$),
c) lõike pindala S_l ja põhja pindala S_p suhtuvad nagu vastavate püramiidide kõrguste ruudud: $\frac{S_l}{S_p} = \frac{(SO_1)^2}{(SO)^2}$.

2. Kui kahel püramiidil on võrdsed kõrgused (joonis 31) ja võrdsed põhjade pindalad, siis neil on võrdsed ka põhjadega paralleelsete lõigete pindalad, kui lõiked on tehtud põhjast ühel ja samal kaugusel. Samuti on neil võrdsed ruumalad. Antud juhul $S_1 = S_2$.
Püramiidi **külgpindalaks** nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.
Korrapärase n –nurkse püramiidi **külgpindala S_k** võrdub poolega põhja ümbermõõdu p ja apoteemi k korrutisest : $S_k = \frac{1}{2}pk$.

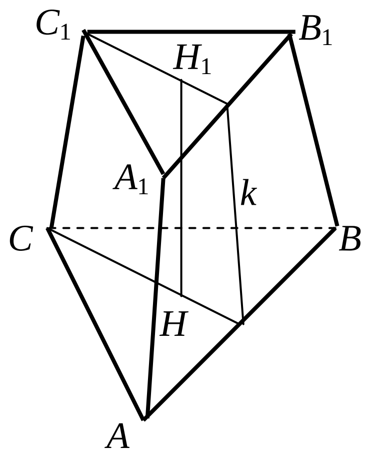
Püramiidi täispindala on $\boldsymbol{S = S_k + S_p}$ ja ruumala $V = \frac{1}{3}S_p \cdot h$.

Tüvipüramiid

Püramiidi põhjaga paralleelne lõige jaotab püramiidi kaheks osaks. Püramiidi osa, mis jääb lõike ja põhja vahele, nimetatakse **tüvipüramiidiks** (joonis 32). Tüvipüramiidi paralleelseid tahke (püramiidi põhi ja sellega paralleelne lõige) nimetatakse tüvipüramiidi **põhjadeks**. Põhjadevahelist kaugust nimetatakse tüvipüramiidi **kõrguseks** (joonisel 32 lõik OO_1). Tüvipüramiidi külgtahud on trapetsid ja põhjad sarnased hulknurgad.



Joonis 32



Joonis 33

Kui $n > 3$, siis n –nurksel püramiidil on diagonaalid.
Tüvipüramiidi kaht mitte ühele tahule kuuluvat serva läbivat tasandit nimetatakse **diagonaaltasandiks** ja sellega määratud lõiget **diagonaallõikeks** (joonisel 32 AA_1C_1C, BB_1D_1D).
Tüvipüramiidi, mis saadakse korrapärase püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasandiga, nimetatakse **korrapäraseks tüvipüramiidiks** (joonis 33).
Korrapärase tüvipüramiidi tahud on kongruentsed trapetsid ning põhjad sarnased korrapärased hulknurgad. Külgtahu kõrgust nimetatakse tüvipüramiidi **apoteemiks** (joonisel 33 lõik k). Korrapärase tüvipüramiidi põhjade keskpunkte ühendavat sirget nimetatakse tüvipüramiidi **teljeks** (joonisel 33 sirge HH_1).
Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala S_k võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja tüvipüramiidi apoteemi k korrutisega:

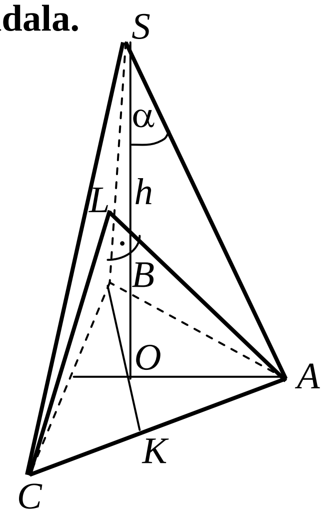
$$S_k = \frac{na + nb}{2} \cdot k,$$ kus n on püramiidi põhiservade arv, a ja b põhiservad.

Tüvipüramiidi täispindala $S = S_k + S_1 + S_2$, kus S_1 ja S_2 on põhjade pindalad.

Tüvipüramiidi ruumala on arvutatav valemiga $V = \frac{1}{3} h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, kus h on tüvipüramiidi kõrgus.

Näited

1. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus *h* moodustab külgservaga nurga α. Avaldada ühte põhiserva läbiva ja vastasoleva külgservaga ristuva lõike pindala.



Joonis 34

Lahendus.
Vaatame kolmnurka ASO (joonis 34), siit $OA = h\tan\alpha$ ja $SA = SB = \dfrac{h}{\cos\alpha}$. Et *OB* = *OA*, siis ka $OB = h\tan\alpha$.
Kuna *O* on kolmnurga *ABC* mediaanide lõikepunkt, siis *KB* = 1,5*OB* = 1,5 *h* tanα. Et kolmnurk *ABC* on võrdkülgne, siis tema kõik nurgad on 60^0 ja mediaan poolitab nurga. Seega kolmnurgast ABK saame, et $AB = \dfrac{KB}{\cos 30^0} = \dfrac{3h\tan\alpha \cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{3}h\tan\alpha$. Võrdkülgse kolmnurga kõik küljed on võrdsed, seega *AC* = *AB*.

NB! Soovitav oleks teha eraldi joonised kolmnurkadest ABC, KBS ja CLA.

Lõikeks oleva kolmnurga CLA kõrguse LK leidmiseks vaatleme kolmnurka KBS. Selle kolmnurga pindala saab leida kahel viisil:

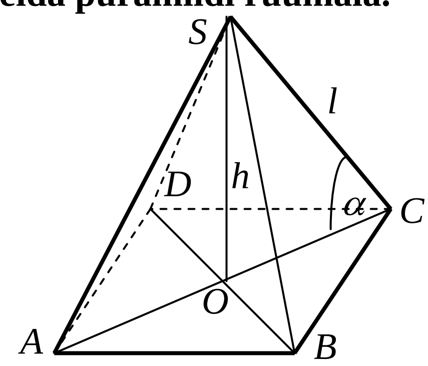
$S_{KSB} = \dfrac{KL\cdot SB}{2}$ ja $S_{KSB} = \dfrac{KB\cdot h}{2}$, seega $\dfrac{KL\cdot SB}{2} = \dfrac{KB\cdot h}{2}$, siit

$KL = \dfrac{KB\cdot h}{SB} = \dfrac{1{,}5h\tan\alpha\cdot h}{\dfrac{h}{\cos\alpha}} = 1{,}5h\sin\alpha$. Nüüd saame avaldada lõike pindala:

$$S_l = S_{ACL} = \frac{AC\cdot KL}{2} = \frac{\sqrt{3}h\tan\alpha\cdot 1{,}5h\sin\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{3}h^2\tan\alpha\sin\alpha}{4}.$$

Vastus: lõike pindala on avaldatav kujul $\dfrac{3\sqrt{3}h^2\tan\alpha\sin\alpha}{4}$.

2. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv *l* moodustab põhjaga nurga α. Leida püramiidi ruumala.



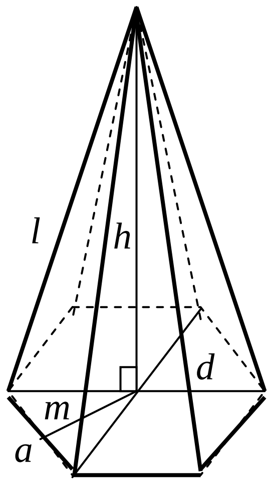
Joonis 35

Lahendus.
Vaatame kolmnurka *SOC* (joonis 35). Püramiidi kõrgus *h* = *l* · sinα. Samast kolmnurgast saame, et pool põhja diagonaali *OC* = *l* · cosα ning diagonaal *AC* = 2*l* · cosα.
Kuna põhi on ruut, siis $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$
Siit põhja pindala $S_p = AB^2 = \dfrac{1}{2}AC^2 = 2l^2\cos^2\alpha$.

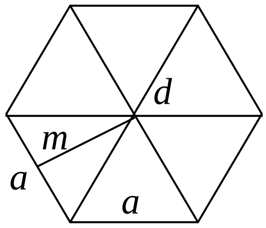
Kuna püramiidi ruumala $V = \dfrac{1}{3}S_p h$, siis $V = \dfrac{1}{3}\cdot 2l^2\cos^2\alpha\cdot l\sin\alpha = \dfrac{2}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

Vastus: püramiidi ruumala on $\dfrac{2}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

3. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui on antud külgserv *l* ja põhja pikim diagonaal *d*.



Joonis 36



Joonis 36A

Lahendus.
Püramiidi ruumala leidmiseks on valem $V = \frac{1}{3} S_p h$.

Olgu püramiidi põhiserv a ja põhitahuks oleva korrapärase kuusnurga apoteem m (joonised 36 ja 36A).

Põhja pindala koosne 6-st võrdkülgsest kolmnurgast, seega $S_p = 3am$. Kuna põhja pikim diagonaal on d, siis $a = \frac{1}{2}d$ ja

$m^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$. Et $a = \frac{1}{2}d$, siis $m^2 = \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{3}{16}d^2$, siit $m = \frac{\sqrt{3}}{4}d$.

Nüüd saame tuntud suuruse d kaudu põhja pindalaks $S_p = 3 \cdot \frac{1}{2}d \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}d = \frac{3\sqrt{3}}{8}d^2$.

Ruumala leidmiseks on meil veel vaja püramiidi kõrgust, selle saame Pythagorase teoreemi abil:

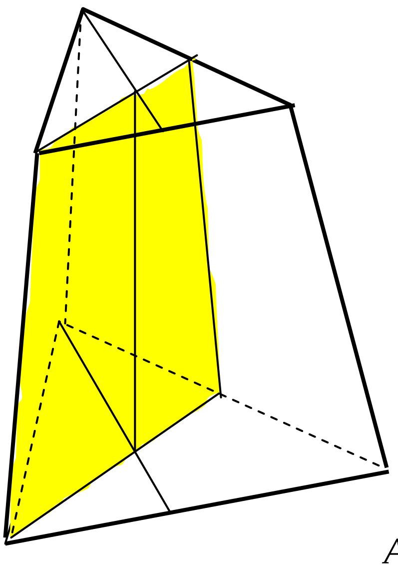
$h^2 = l^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{4l^2 - d^2}{4}$, seega $h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - d^2}$.

Püramiidi ruumala $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}d^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - d^2} = \frac{1}{16}d^2\sqrt{4l^2 - d^2}$.

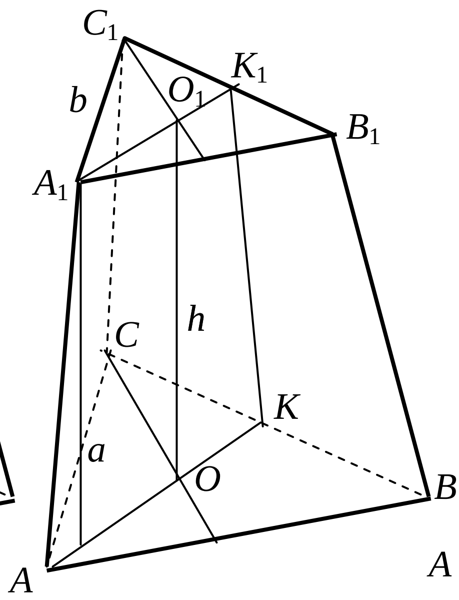
Vastus: püramiidi ruumala on $V = \frac{1}{16}d^2\sqrt{4l^2 - d^2}$.

4. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi suurem põhiserv on *a* ja väiksem põhiserv on *b*. Leida tüvipüramiidi üht külgserva ja telge läbiva lõike pindala, kui külgserv moodustab põhitasandiga nurga 45^0.

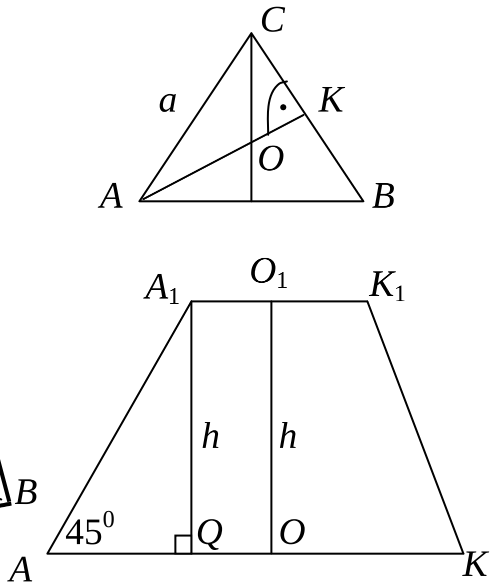
Lahendus.
Teeme ülesande edukaks lahendamiseks esmalt üldjoonise (joonis 37) ning seejärel täpsemad joonised kehast, põhjast ja lõikest (joonised 37A, 37B, 37C). Selgub, et lõikeks on trapets, mille alusteks on põhjade mediaanid ehk kolmnurkade võrdkülgsuse tõttu põhjade kõrgused. Lõikeks oleva trapetsi kõrgus ühtib tüvipüramiidi kõrgusega ja tuleb samuti eelnevalt leida.



Joonis 37



Joonis 37A



Joonised 37B ja 37C

Kuna põhjad on võrdkülgsed kolmnurgad ja O on mediaanide lõikepunkt (joonis 37B), siis alumise põhja korral (külje pikkus a) lõik $AK = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ja $AO = \frac{2}{3}AK = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Analoogiliselt ülemise põhja korral $A_1K_1 = \frac{\sqrt{3}b}{2}$ ja $A_1O_1 = \frac{\sqrt{3}b}{3}$.

Nii oleme leidnud lõikeks oleva trapetsi alused.

Püüame leida selle trapetsi kõrgust, sest trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

$$AQ = AO - A_1O_1 = \frac{\sqrt{3}a}{3} - \frac{\sqrt{3}b}{3} = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{3}.$$

Et nurk A_1QA on 90^0 ja nurk A_1AQ on 45^0, siis saab kolmnurga AA_1Q kolmas nurk olla ka vaid 45^0 ning see kolmnurk on seega võrdhaarne, st $A_1Q = h = AQ$, mis oli meil eelnevalt leitud. Nüüd saame leida lõike pindala:

$$S_{lõige} = \frac{AK + A_1K_1}{2} \cdot h = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(a-b)}{3} = \frac{\sqrt{3}(a+b)}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}(a-b)}{3} = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

Vastus: lõike pindala on $\frac{a^2 - b^2}{4}$.