Funktsioonid I

Funktsiooni ekstreemumid

Ekstreemumkoha leidmiseks kehtib tingimus: **X_e: f '(x) = 0**

1. Leia funktsiooni $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ekstreemumkohad ja ekstreemumid.

Lahendus:

Leiame antud funktsiooni tuletise:

$y' = 3x^2 - 4x - 4$.

Ekstreemumkoht: X_e: $f'(x) = 0$

Lahendame võrrandi

$3x^2 - 4x - 4 = 0$;

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6};$$

$$x_1 = \frac{4+8}{6} = 2;$$

$$x_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ekstreemumkohad on $X_e = \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$.

Järgnevalt uurime saadud ekstreemumkohti.

Leiame saadud argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused. Saame

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = -3;$$

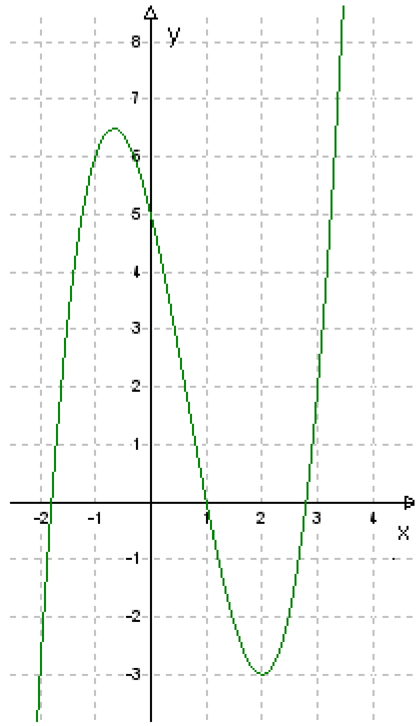
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 = 6\frac{13}{27}.$$

Et kindlaks teha, kas argumendi väärtustel 2 ja –2/3 läheb kasvamine üle kahanemiseks või vastupidi, koostame tuletise väärtuste tabeli, kus argumendi väärtusteks on võetud ekstreemumkohtadele lähedased arvud.

Ekstreemumkoha 2 lähedasteks arvudeks võtame 1 ja 3 ning –2/3 lähedased arvud olgu –1 ja 0. Saame

x	1	3	– 1	0
y '	– 5	11	3	– 4

Joonestame graafiku.



Kohal $x_1 = 2$ läheb kahanemine üle kasvamiseks, sest kohal $x = 1$ on tuletis negatiivne ja kohal $x = 3$ positiivne. Seega $x_1 = 2$ on miinimumkoht ning $y_{1\ min} = -3$ ehk miinimumpunkt on $P_{min}(2; -3)$.

Kohal $x_2 = -2/3$ läheb kasvamine üle kahanemiseks, sest kohal $x = -1$ on tuletis positiivne ja kohal $x = 0$ negatiivne. Seega $x_2 = -2/3$ on maksimumkoht ning $y_{max} = 6\frac{13}{27}$ ehk maksimumpunkt on $P_{max}\left(-\frac{2}{3}; 6\frac{13}{27}\right)$.

2. Leia funktsiooni $y = x^4 - 4x^3$ ekstreemumkohad ja ekstreemumid.

Lahendus:

Leiame tuletise:

$y' = 4x^3 - 12x^2$.

Ekstreemumkoht: $X_e : f'(x) = 0$

Lahendame võrrandi

$4x^3 - 12x^2 = 0$;

$x^2 (4x - 12) = 0$;

$x_1 = 0$;

$x_2 = 3$.

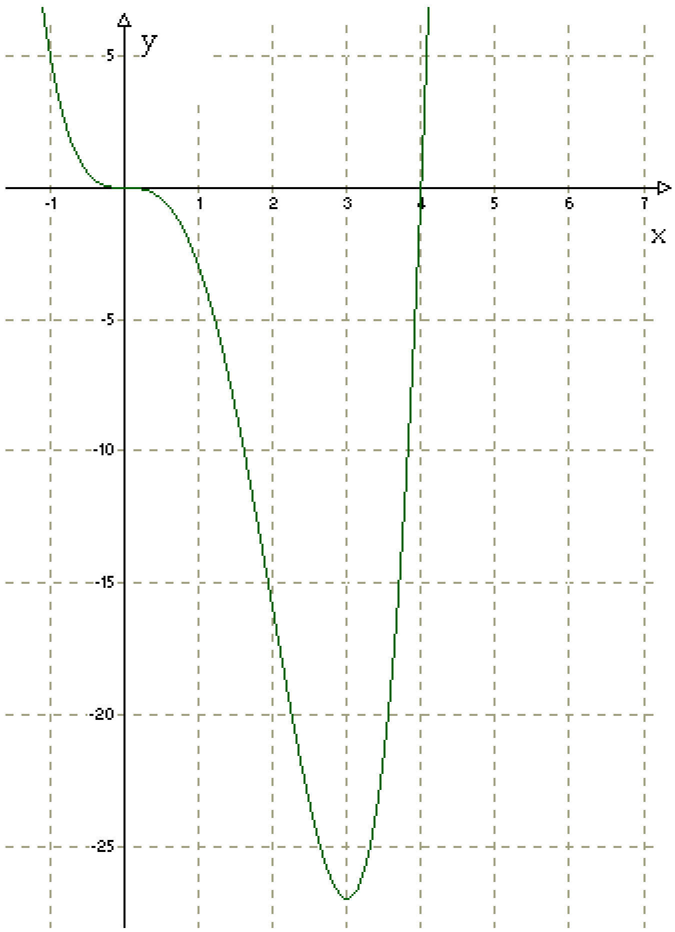
Ekstreemumkohad on $X_e = \{0; 3\}$

Järgnevalt uurime saadud ekstreemumkohti.

Koostame tuletise väärtuste tabeli, kus argumendi väärtusteks on leitud ekstreemumkohtade lähedased arvud:

x	– 1	1	2	4
y’	– 16	– 8	–16	64

Joonestame graafiku.



Näeme, et kohal $x_2 = 3$ läheb funktsioon üle kahanemiselt kasvamisele. Seega x = 3 on antud funktsiooni miinimumkoht ja $y_{min} = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$ (y väärtus leitakse esialgse funktsiooni kaudu).

Kohal $x_1 = 0$ funktsiooni tuletise märk ei muutu, st funktsioon jääb kahanevaks.