Funktsioonid I

Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Funktsioon $y = f(x)$ on kasvav vahemikus]a; b[, kui ta rahuldab tingimust $f\,'(x) > 0$.
Funktsioon $y = f(x)$ on kahanev vahemikus]a; b[, kui ta rahuldab tingimust $f\,'(x) < 0$.

1. **Selgita, kas argumendi väärtused – 2 ja 1 kuuluvad funktsiooni $f(x) = x^3 - 2x^2$ kasvamis- või kahanemispiirkonda.**
   Lahendus:
   Avaldame funktsiooni tuletise.
   $f\,'(x) = 3x^2 - 4x$.
   Teame, et funktsioon on kasvav punktis x_o, kui $f'(x_o) > 0$ ja kahanev, kui $f'(x_o) < 0$.
   $f\,'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 20 > 0$; seega seega f(x) on kasvav kohal – 2.
   $f\,'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -1 < 0$; seega seega f(x) on kahanev kohal 1.
   Vastus: funktsioon f(x) on kasvav kohal – 2 ja kahanev kohal 1.

2. **Selgita, kas funktsioon $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ on kasvav või kahanev argumendi väärtustel – 5 ja – 2.**
   Lahendus:
   Leiame kõigepealt tuletise. Saame
   $f\,'(x) = 6x^2 + 18x - 24$.
   Teame, et funktsioon on kasvav punktis x_o, kui $f'(x_o) > 0$ ja kahanev, kui $f'(x_o) < 0$.
   $f\,'(-5) = 6 \cdot (-5)^2 + 18 \cdot (-5) - 24 = 36 > 0$; seega f(x) on kasvav kohal – 5.
   $f\,'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 + 18 \cdot (-2) - 24 = -36 < 0$; seega f(x) on kahanev kohal – 2.
   Vastus: f(x) on kasvav kohal – 5 ja kahanev kohal – 2.

3. **Leia funktsiooni $y = 2x^2 - 3x + 1$ kasvamis- ja kahanemispiirkond.**
   Lahendus:
   Avaldame funktsiooni tuletise. Saame
   $f\,'(x) = 4x - 3$.
   1) *Kasvamispiirkond:* $X\uparrow$: $f'(x) > 0$
   $4x - 3 > 0$;
   $4x > 3$;
   $x > \frac{3}{4}$.
   Seega funktsiooni kasvamispiirkond on $X\uparrow = \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$.
   2) *Kahanemispiirkond:* $X\downarrow$: $f'(x) < 0$
   $4x - 3 < 0$;
   $4x < 3$;

$x < \frac{3}{4}.$

funktsiooni kahanemispiirkond on $X\downarrow = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right).$

Vastus: $X\uparrow = \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$, $X\downarrow = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right).$

4. Leia funktsiooni y = – 4x³ – x² + 4x – 7 kasvamis- ja kahanemispiirkond.

Lahendus:

Leiame tuletise. Saame

$f'(x) = -12x^2 - 2x + 4.$

1) *Kasvamispiirkond:* $X\uparrow$: $f'(x) > 0$

$-12x^2 - 2x + 4 > 0.$

Lahendame selle võrratuse.

$$-12x^2 - 2x + 4 = 0 \quad |:(-2)$$

$$6x^2 + x - 2 = 0;$$

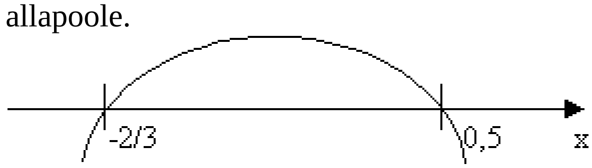
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12};$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{12};$$

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Joonestame nüüd graafiku, et leida meid huvitav piirkond. Kuna esialgses võrratuses ($-12x^2 - 2x + 4 > 0$) on ruutliikme ehk x^2 kordaja negatiivne, siis parabool avaneb allapoole.



Näeme, et funktsioon on kasvav piirkonnas $X\uparrow = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right).$

2) *Kahanemispiirkond:* $X\downarrow$: $f'(x) < 0$

$-12x^2 - 2x + 4 < 0;$

$$-12x^2 - 2x + 4 = 0 \quad |:(-2)$$

$$6x^2 + x - 2 = 0;$$

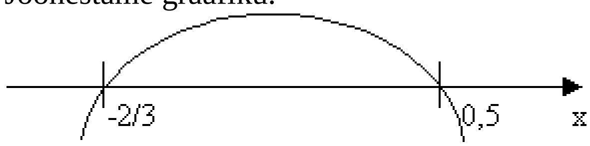
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12};$$

$$x=\frac{-1\pm 7}{12};$$

$$x_1=\frac{-1+7}{12}=\frac{1}{2};$$

$$x_2=\frac{-1-7}{12}=-\frac{2}{3}.$$

Joonestame graafiku.



Näeme, et funktsioon on kahanev piirkonnas $X\downarrow=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.

Vastus: $X\uparrow=\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$, $X\downarrow=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

5. Leia funktsiooni $f(x)=\frac{3}{2-x}$ kasvamis- ja kahanemispiirkond.

Lahendus:

Leiame tuletise. Saame

$$f'(x)=\left(\frac{3}{2-x}\right)'=\frac{3'\cdot(2-x)+3\cdot(2-x)'}{(2-x)^2}=\frac{0\cdot(2-x)+3\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{-3}{(2-x)^2}.$$

1) *Kasvamispiirkond:* $X\uparrow$: $f'(x)>0$

$$\frac{-3}{(2-x)^2}>0;$$

$$\begin{cases}-3(2-x)^2>0\\ 2-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3(2-x)^2>0\\ x\neq 2\end{cases};$$

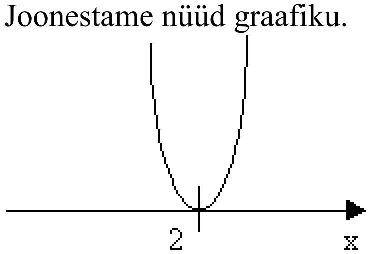
$$-3(2-x)^2>0\quad\big|:(-3)$$

$$(2-x)^2<0;$$

$$(2-x)^2=0;$$

$$x=2.$$

Joonestame nüüd graafiku.



Näeme, et funktsioon on kasvav piirkonnas $X\uparrow=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

2) *Kahanemispiirkond:* $X\downarrow$: $f'(x)<0$

$\dfrac{-3}{(2-x)^2}<0;$

$\begin{cases}-3(2-x)^2<0\\ 2-x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3(2-x)^2<0\\ x\neq 2\end{cases};$

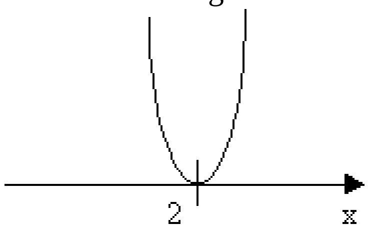
$-3(2-x)^2<0 \quad |:(-3)$

$(2-x)^2>0;$

$(2-x)^2=0;$

$x=2.$

Joonestame graafiku.



Näeme, et funktsioonil puudub kahanemispiirkond.

Vastus: $X\uparrow=\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right);\quad X\downarrow=\varnothing$