MA5 - Funktsioonid I

Tarkuseterad

1.1 Võrdeline sõltuvus

Üks suurus sõltub teisest võrdeliselt, kui ühe suuruse kasvamisel (kahanemisel) mingi arv korda teine suurus kasvab (kahaneb) sama arv korda.
Muutuja y on võrdeline muutujaga x, kui $y=ax$ ($a\neq 0$).
Kui x ja y on võrdelises sõltuvuses, siis on nende jagatis konstantne. $\frac{y}{x}=a$.
Konstanti a nimetatakse võrdeteguriks.
Võrdelise sõltuvuse graafikuks on sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti.

1.2 Pöördvõrdeline sõltuvus

Üks suurus sõltub teisest pöördvõrdeliselt, kui ühe suuruse kasvamisel (kahanemisel) mingi arv korda teine suurus väheneb (suureneb) sama arv korda.
Muutuja y on pöördvõrdeline muutujaga x, kui $y=\frac{a}{x},\ a\neq 0,\ x\neq 0$
Kui muutujad x ja y on pöördvõrdelises sõltuvuses, siis on nende korrutis konstantne $yx=a$.
Konstanti a nimetatakse pöördvõrdelisuse konstandiks.
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on **hüperbool**, mille harud asetsevad I ja III veerandis (kui $a>0$) või II ja IV veerandis (kui $a<0$).

1.3 Lineaarfunktsioon

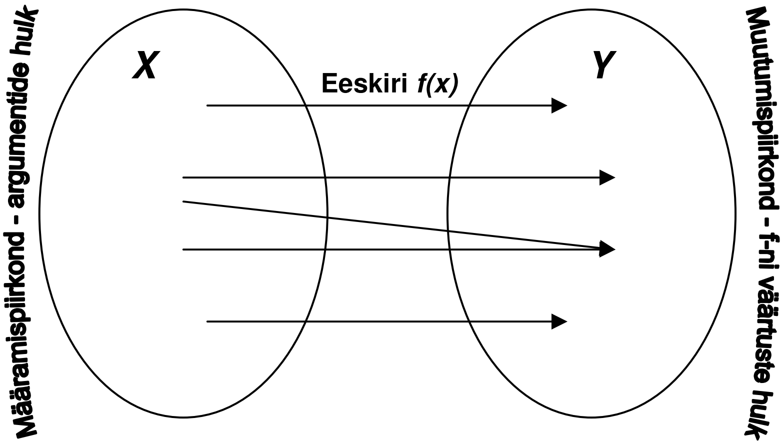
Kui kaks muutujat x ja y on seotud valemiga $y=ax+b$, kus a ja b on antud arvud ning $a\neq 0$, siis öeldakse, et muutujad x ja y on lineaarses sõltuvuses.
Valem $y=ax+b$ esitab lineaarfunktsiooni. Lineaarfunktsiooni graafikuks on **sirge** ($a>0$, siis tõusev sirge, $a<0$, siis langev sirge, b väärtus määrab sirge lõikekoha y-teljega).

1.4 Ruutfunktsioon

Valem $y=ax^2+bx+c$, kus a, b, c on antud arvud ($a\neq 0$), esitab ruutfunktsiooni. Ruutfunktsiooni graafik on **parabool**. Parabool on sümmeetriline x-telje suhtes. Ruutliikme kordaja a märk määrab parabooli avanemise ning vabaliige c parabooli lõikekoha y-teljega.
Parabooli **haripunktiks** nimetatakse parabooli ja tema sümmeetriatelje lõikepunkti. $x_h=-\frac{b}{2a}$ või $x_h=\frac{x_1+x_2}{2}$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid (nullkohad).
Parabooli skitseerimiseks on vaja leida tema haripunkti koordinaadid ja nullkohad.

1.5 Funktsiooni mõiste

Muutujat, millele me võime ise teatud hulgast vabalt väärtusi anda, nimetatakse **sõltumatuks muutujaks**. Muutujat, mille väärtused leitakse vastavalt sõltumatu muutuja väärtustele, nimetatakse **sõltuvaks muutujaks**.
Kui sõltumatu muutuja x igale väärtusele hulgast X vastab mingi eeskirja järgi üks ja ainult üks sõltuva muutuja y väärtus hulgast Y, siis öeldakse, et hulgal X on määratud **funktsioon**.
Funktsiooniks nimetatakse vastavust, mille järgi sõltumatu muutuja igale väärtusele seatakse vastavusse sõltuva muutuja mingi väärtus.



Muutuja x väärtuste hulka nimetatakse funktsiooni **määramispiirkonnaks.** Muutuja y väärtuste hulka nimetatakse funktsiooni **väärtuste hulgaks** ehk funktsiooni **muutumispiirkonnaks.**
Funktsiooni tähistatakse $\boldsymbol{y=f(x)}$. Sõltumatut muutujat x nimetatakse funktsiooni **argumendiks**.

1.6 Funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamine, kahanemine ja ekstreemumid

Mõiste, tähistus	**Selgitus**	**Leidmine**
Nullkohad X_0	argumendi väärtused, mille korral f-ni väärtus on null	võrrand $f(x)=0$
Positiivsuspiirkond X^+	argumendi väärtused, mille korral f-ni väärtus on positiivne	võrratus $f(x)>0$
Negatiivsuspiirkond X^-	argumendi väärtused, mille korral f-ni väärtus on negatiivne	võrratus $f(x)<0$
Kasvamisvahemik $X^{\uparrow}$	argumendi väärtuste vahemik, kus argumendi väärtuste suurenedes ka funktsiooni vastavad väärtused suurenevad, st $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	graafikult (tõusev joon)
Kahanemisvahemik $X^{\downarrow}$	argumendi väärtuste vahemik, kus argumendi väärtuste suurenedes funktsiooni vastavad väärtused vähenevad, st $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	graafikult (langev joon)
Ekstreemumkohad X_E	argumendi väärtused, mille korral funktsioon omandab suurima või vähima väärtuse oma naaberväärtustega võrreldes Liigitus: maksimum- või miinimumkoht	graafikult (kasvamine läheb üle kahanemiseks või vastupidi)

NB! Ekstreemumpunkt – punkt, anda koordinaatidega $E(x, y)$
Ekstreemumkoht – x väärtus
Ekstreemum – y väärtus.

1.7 Paarisfunktsioon. Paaritu funktsioon. Pöördfunktsioon

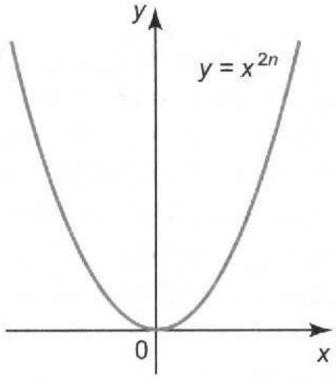
Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks**, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x)=f(x)$. Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.
Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x)=-f(x)$. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Olgu hulgal X määratud funktsioon $y=f(x)$. Kui selle funktsiooni muutumispiirkonna Y igale elemendile y vastab üks kindel element x hulgast X nii, et $x=f(y)$, siis on hulgal Y määratud funktsioon, mida nimetatakse esialgse funktsiooni **pöördfunktsiooniks**. Funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes.

1.8 Astmefunktsioonid

Astmefunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mida esitab valem $y=x^n$, kus $n \in R$.

$y = x^{2n}, n \in Z^+$ (astendaja on positiivne paarisarv 2; 4; 6; …)



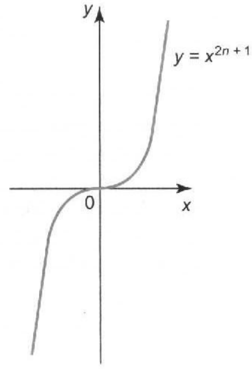
Ühised omadused:
graafik sümmeetriline y-telje suhtes (paarisfunktsioon)

$X = R$ $\quad X^+ = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ $\quad X^{\uparrow} = (0;\infty)$

$Y = [0;\infty)$ $\quad X^- = \phi$ $\quad X^{\downarrow} = (-\infty;0)$

$X_0 = \{0\}$ $\quad X_E = \{0\}$

$y = x^{2n+1}, n \in Z^+$ (astendaja on positiivne paaritu arv 3; 5; 7; …)



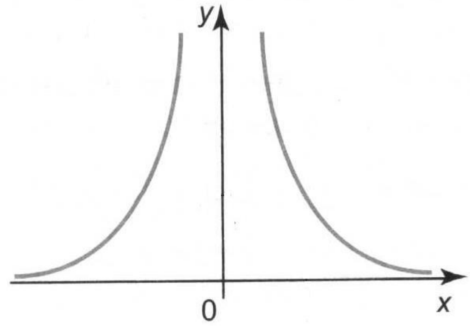
Ühised omadused:
graafik sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes (paaritu funktsioon)

$X = R$ $\quad X^+ = (0;\infty)$ $\quad X^{\uparrow} = (-\infty;\infty)$

$Y = R$ $\quad X^- = (-\infty;0)$ $\quad X^{\downarrow} = \phi$

$X_0 = \{0\}$ $\quad X_E = \phi$

$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}, n \in Z^+$ (astendaja on negatiivne paarisarv …; -6; -4; -2



Ühised omadused:
graafik sümmeetriline y-telje suhtes (paarisfunktsioon)

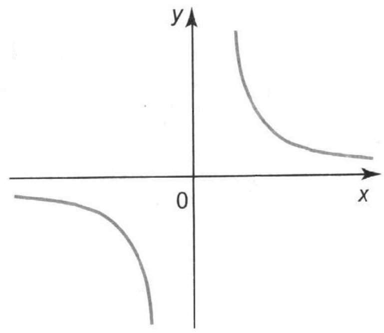
$X = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ $\quad X^+ = X$ $\quad X^{\uparrow} = (-\infty;0)$

$Y = (0;\infty)$ $\quad X^- = \phi$ $\quad X^{\downarrow} = (0;\infty)$

$X_0 = \phi$ $\quad X_E = \phi$

Kui $x \to 0$, siis $y \to \infty$. Kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, siis $y \to 0$.

$y = x^{-2n+1} = \dfrac{1}{x^{-2n+1}}, n \in Z^+$ (astendaja on negatiivne paaritu arv …; -5; -3; -1



Ühised omadused:
graafik sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes (paaritu funktsioon)

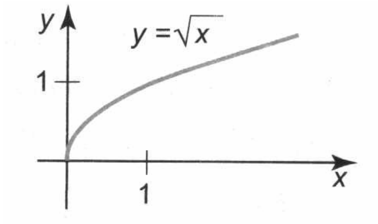
$X = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ $\quad X^+ = (0;\infty)$ $\quad X^{\uparrow} = \phi$

$Y = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ $\quad X^- = (-\infty;0)$ $\quad X^{\downarrow} = X$

$X_0 = \phi$ $\quad X_E = \phi$

Kui $x \to 0$ ja $x < 0$, siis $y \to -\infty$. Kui $x \to 0$ ja $x > 0$, siis $y \to \infty$. Kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, siis $y \to 0$.

Funktsioon $y = \sqrt{x}$

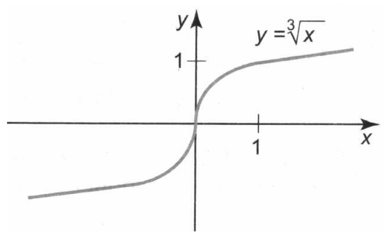


$X = [0;\infty)$ $\quad X^+ = X$ $\quad X^{\uparrow} = X$

$Y = [0;\infty)$ $\quad X^- = \phi$ $\quad X^{\downarrow} = \phi$

$X_0 = \{0\}$ $\quad X_E = \phi$

Funktsioon $y = \sqrt[3]{x}$



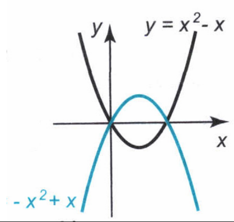
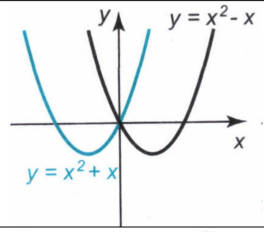
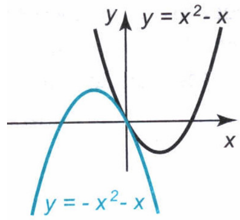
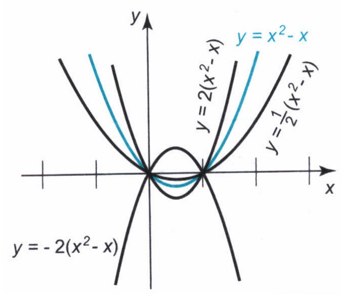
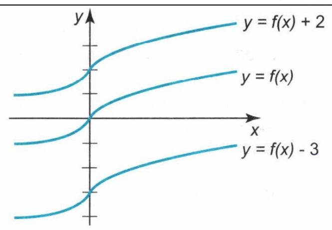
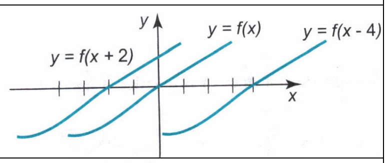
$X = R$ $\quad X^+ = (0;\infty)$ $\quad X^{\uparrow} = X$

$Y = R$ $\quad X^- = (-\infty;0)$ $\quad X^{\downarrow} = \phi$

$X_0 = \{0\}$ $\quad X_E = \phi$

Paaritu funktsioon

1.9 Funktsiooni graafiku teisendused

Teisendus	Mis juhtub $y = f(x)$ graafikuga?	Näide
$y = -f(x)$	peegeldub x-telje suhtes	
$y = f(-x)$	peegeldub y-telje suhtes	
$y = -f(-x)$	peegeldub koordinaatide alguspunkti suhtes	
$y = k \cdot f(x)$	$y = f(x)$ graafiku iga punkti ordinaati tuleb korrutada arvuga k	
$y = f(x) + c$	$y = f(x)$ graafik nihkub y-telje sihis c ühikut (c>0 - üles, c<0 - alla)	
$y = f(x - c)$	$y = f(x)$ graafik nihkub x-telje sihis c ühikut (c>0 - paremale, c<0 - vasakule)	
$y = \|f(x)\|$	$y = f(x)$ graafiku allpool x-telge asuvad osad peegelduvad x-teljest, ülevalpool olevad osad jäävad samaks