# Funktsiooni mõiste. Määramis- ja muutumispiirkonnad.

-----------------------------------------------------

*Funktsiooni määramispiirkond X – kõigi selliste muutuja x väärtuste hulk, mille korral f(x) on arvutatav.*
*Funktsiooni muutumispiirkond Y – muutuja y kõigi väärtuste hulk.*

-----------------------------------------------------

1. **Kas keha poolt läbitud tee pikkus on aja funktsioon?**
   *Vastus*: On küll, sest läbitud tee pikkus sõltub ajast.

2. **Keha liigub ühtlaselt kiirenevalt. Kas selle keha liikumise kiirendus on aja funktsioon?**
   *Vastus*: Ei ole, sest läbitud tee pikkus ei sõltu ajast.

3. **Kas keha mass on keha ruumala funktsioon, kui tihedus $\gamma = 1{,}7$?**
   *Vastus*: On küll, sest keha tihedus sõltub ruumalast ja massist.

4. **On antud funktsioon $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x$. Leia**
   **1) $f(0)$**
   *Lahendus*: $f(0)$ tähendab seda, et muutuja x-i asemel tuleb panna väärtus 0 ja arvutada. Saame
   $f(0) = 0^4 - 2\cdot 0^3 + 0^2 + 3\cdot 0 = 0$
   **2) $f(0{,}1)$**
   *Lahendus*: $f(0{,}1) = 0{,}1^4 - 2\cdot 0{,}1^3 + 0{,}1^2 + 3\cdot 0{,}1 = 0{,}3081$
   **3) $f(-1)$**
   *Lahendus*: $f(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + 3\cdot(-1) = 1$
   **4) $f(2)$**
   *Lahendus*: $f(2) = 2^4 - 2\cdot 2^3 + 2^2 + 3\cdot 2 = 10$

5. **On antud funktsioon $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Leia**
   **1) $f(0)$**
   *Lahendus*: $f(0) = \dfrac{1-0^2}{1+0^2} = 1$
   **2) $f(x+2)$**
   *Lahendus*: $f(x+2) = \dfrac{1-(x+2)^2}{1+(x+2)^2} = \dfrac{1-x^2-4x-4}{1+x^2+4x+4} = \dfrac{-x^2-4x-3}{x^2+4x+5}$
   **3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$**
   *Lahendus*: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
   **4) $f(x)+1$**

*Lahendus*: $f\left(x\right)+1=\frac{1-x^2}{1+x^2}+1=\frac{1-x^2+1+x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}$

**5)** $\boldsymbol{\frac{1}{f\left(x\right)}}$

*Lahendus*: $\frac{1}{f\left(x\right)}=\frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{1+x^2}{1-x^2}$

**6. On antud funktsioon $\boldsymbol{f\left(x\right)=\frac{2x^2-5}{x+2}}$. Leia**

**1)** $\boldsymbol{f\left(3x\right)}$

*Lahendus*: $f\left(3x\right)=\frac{2\cdot\left(3x\right)^2-5}{3x+2}=\frac{18x^2-5}{3x+2}$

**2)** $\boldsymbol{5f\left(x\right)}$

*Lahendus*: $5f\left(x\right)=5\cdot\frac{2x^2-5}{x+2}=\frac{10x^2-25}{x+2}$

**3)** $\boldsymbol{\sqrt{f\left(x\right)}}$

*Lahendus*: $\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{\frac{2x^2-5}{x+2}}$

**7. Näita, et** $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f\left(x\right)}{x^4}}$, kui $\boldsymbol{f\left(x\right)=x^4+5x^2+1}$.

*Lahendus*:

Võrduse vasakpool: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^4+5\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^4}+\frac{5^{\left(x^2\right.}}{x^2}+1^{\left(x^4\right.}=\frac{1+5x^2+x^4}{x^4}=\frac{x^4+5x^2+1}{x^4}$

Võrduse parem pool: $\frac{f\left(x\right)}{x^4}=\frac{x^4+5x^2+1}{x^4}$

Vasak ja parem pool on võrdsed.

**8. On antud hulk X = {x | -2; 1; 2; 5} ja seos f(x) = $x^2$. Leia selle seose põhjal funktsiooni väärtuste hulk Y.**

*Lahendus:*

Arvutame antud seose abil argumendi igale väärtusele vastava funktsiooni väärtuse:

f(– 2) = $(-2)^2$ = 4;

f(1) = $1^2$ = 1;

f(2) = $2^2$ = 4;

f(5) = $5^2$ = 25.

*Vastus:* Funktsiooni väärtuste hulk Y = {1; 4; 25}

**9. On antud funktsioon y = $x^2$ + 1, kus x ∈{-1; 0; 1; 2; 3}. Leia funktsiooni muutumispiirkond. Skitseeri graafik.**

*Lahendus:*

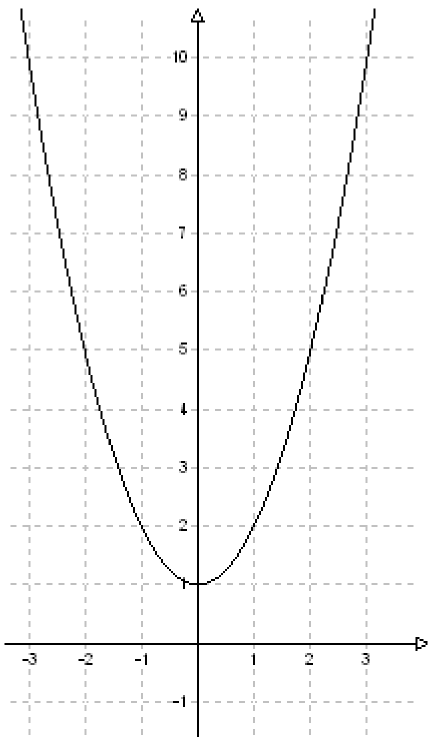
Arvutame antud seose abil argumendi igale väärtusele vastava funktsiooni

**10. Leia funktsiooni y = 3x – 5 määramispiirkond. Skitseeri graafik.**

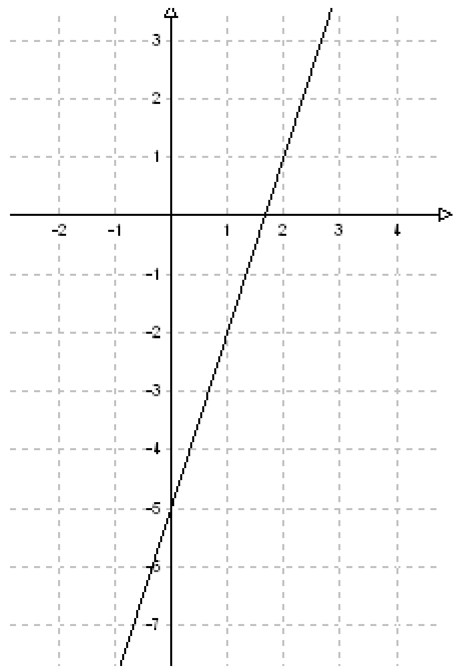
*Lahendus:*

Kuna seose y = 3x – 5 järgi saab leida funktsiooni y väärtusi mistahes reaalarvulise x väärtuse puhul, siis on selle funktsiooni määramispiirkonnaks kogu

väärtuse. Saame
$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2;$
$f(0) = 0^2 + 1 = 1;$
$f(1) = 1^2 + 1 = 2;$
$f(2) = 2^2 + 1 = 5;$
$f(3) = 3^2 + 1 = 10.$
*Vastus:* Funktsiooni väärtuste hulk Y = {1; 2; 5; 10}

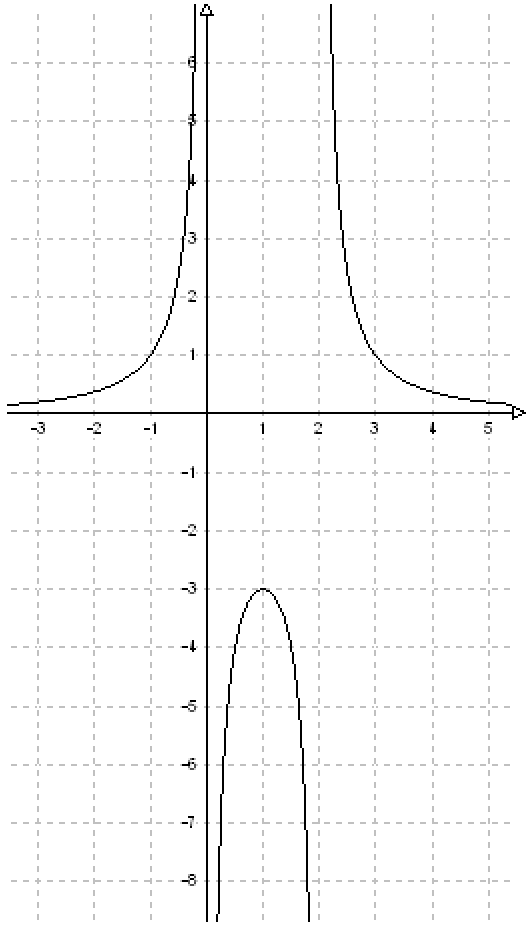


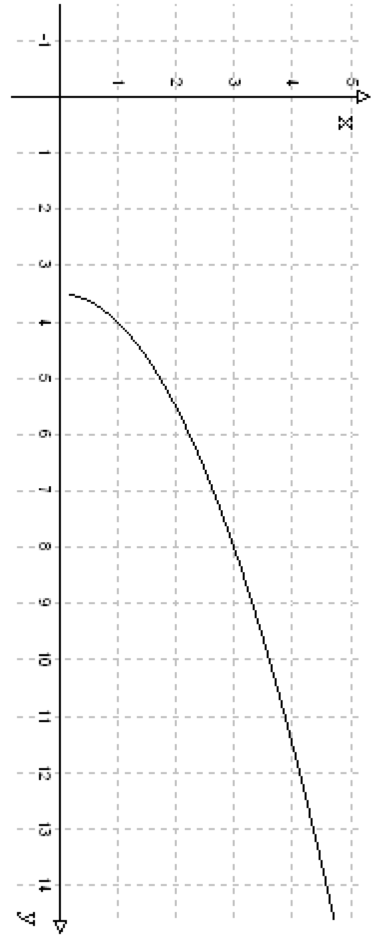

reaalarvude hulk.
*Vastus:* $X \in R$




**11. Leia funktsiooni $y = \dfrac{3}{x^2 - 2x}$ määramispiirkond. Skitseeri graafik.**
*Lahendus:*
Antud funktsiooni määramispiirkonnaks on kõik reaalarvud, välja arvatud need, mis muudavad murru nimetaja nulliks. Selleks on võrrandi $x^2 - 2x = 0$ lahendid:
$x^2 - 2x = 0;$
$x(x - 2) = 0;$
$x_1 = 0;$
$x_2 = 2.$
*Vastus:* Funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty;0) \cup (0;2) \cup (2;\infty)$

**12. Leia funktsiooni $y = \sqrt{2x - 7}$ määramispiirkond.**
*Lahendus:*
Et juuritav peab olema mittemegatiivne, siis
$\sqrt{2x - 7} \geq 0$
ehk
$2x - 7 \geq 0;$
$2x \geq 7;$
$x \geq 3{,}5.$
*Vastus:* Funktsiooni määramispiirkond on $X = [3{,}5; \infty)$.





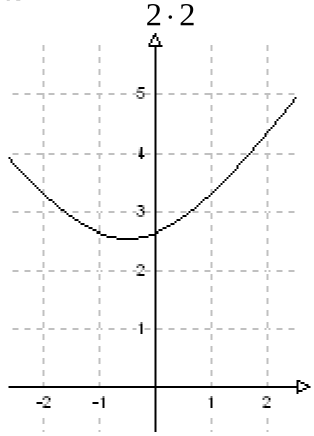
**13. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkond.**

**1)** $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+7}$

*Lahendus*: Ruutjuurealune avaldis peab olema suurem või võrdne nulliga, sest negatiivsest arvust ei saa ruutjuurt võtta.

$2x^2+2x+7 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2+2x+7=0$**;**

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot 7}}{2\cdot 2}=\frac{-2\pm\sqrt{-52}}{4}$$



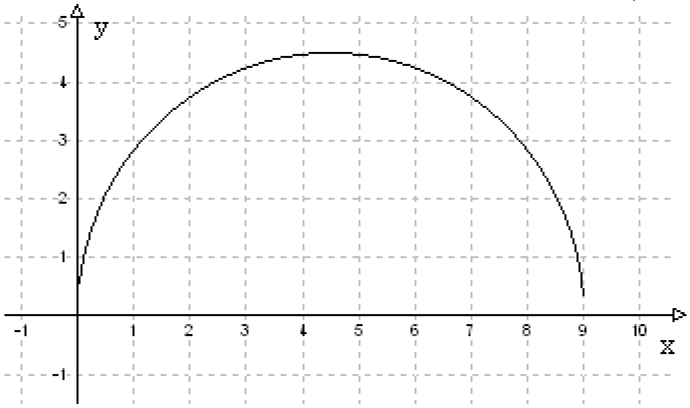
Sellel funktsioonil nullkohad puuduvad, kuid ta paikneb ülevalpool x-telge (vt graafikut). Näeme, et määramispiirkond on kogu reaalarvude hulk.

*Vastus*: $X=\boldsymbol{R}$

**2)** $f(x)=\sqrt{9x-x^2}$

*Lahendus*: *Lahendus*: Ruutjuurealune avaldis peab olema suurem või võrdne nulliga, sest negatiivsest arvust ei saa ruutjuurt võtta.

$9x - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(9-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad ja \quad x_2 = 9$




Muutuja x väärtused on määratud vahemikus nullist üheksani. Mõlemad otspunktid kaasa arvatud. Seega määramispiirkond $X = [0; \quad 9]$

**3)** $f(x) = \sqrt{x-2} + 3\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2+4}$

*Lahendus*: Ruutjuurealune avaldis ei tohi olla negatiivne, seega saame mitu tingimust, mida peame arvestama.

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{on alati suurem nullist} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

*Vastus*: Määramispiirkonnaks on punkt x = 2.

**4)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

*Lahendus*: Siin ei tohi murru nimetaja olla null, sest nulliga ei saa jagada. Saame siis $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Leiame ruutvõrrandi nullkohad. $x^2 - 3x + 2 = 0$. Nendeks on 1 ja 2. Seega muutuja x-i väärtusteks ei tohi olla arvud 1 ja 2.

*Vastus*: Määramispiirkond on $X = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$

**5)** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

*Lahendus*: x-i väärtuseks ei tohi olla 0. Teised arvud on lubatud.

*Vastus*: $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$